Correction du TD 1 - Automatique

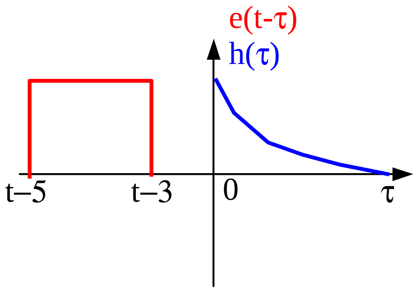
Exercice 1

$$e(t) = u(t-3) - u(t-5) = \begin{cases} 1, & 3 \le t < 5 \\ 0, & t < 3 \text{ et } t > 5 \end{cases}, \quad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

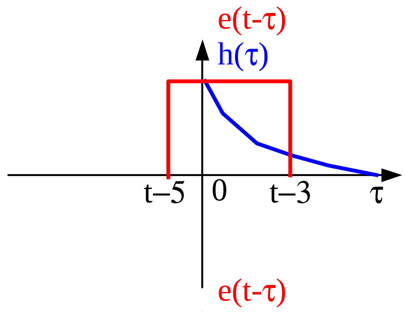
a) Calculer y(t) = e(t)*h(t)

En utilisant la commutativité du produit de convolution on peut écrire

$$y(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

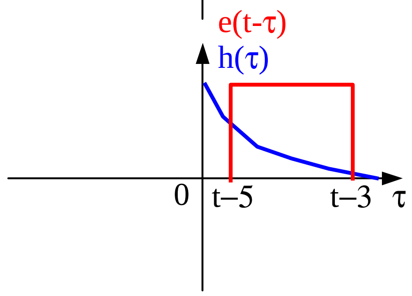


$\Rightarrow$ Si $t < 3$ alors $y(t) = 0$



$\Rightarrow$ Si $3 \le t < 5$

alors $y(t) = \int_{0}^{t-3} e^{-3\tau}d\tau = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-3)}\right)$



$\Rightarrow$ Si $t \ge 5$

alors $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3\tau}d\tau = \frac{1}{3}\left(e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}\right)$

On obtient :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-3)}\right) & 3 \le t < 5 \\ \frac{1}{3}\left(e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}\right) & t \ge 5 \end{cases}$$

b) Calculer $g(t) = \frac{de(t)}{dt} * h(t)$

La dérivée de e(t) est :

$$\frac{de(t)}{dt} = \delta(3) - \delta(5)$$

On calcule le produit de convolution afin d'obtenir g(t) :

$$g(t) = h(t) * \frac{de(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\big(\delta(t-3) - \delta(t-5)\big)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ e^{-3(t-3)} & 3 \le t < 5 \\ e^{-3(t-3)} - e^{-3(t-5)} & t \ge 5 \end{cases}$$

c) Quelle est la relation entre y(t) et g(t) ?

$$g(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Exercice 2

Calculer les solutions des équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace.

Rappel : définition de la transformée de Laplace

$$\int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = y(s) \;;\; \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt}e^{-st}dt = sy(s) - y(0^-) \;;$$
$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2y(t)}{dt^2}e^{-st}dt = s^2y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$$

a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$, $y(0) = \beta$, $y'(0) = \gamma$, $x(t) = \alpha u(t)$;

En utilisant les définitions de la transformée de Laplace de y(t), y'(t) et y''(t) on obtient :

$$s^2y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sy(s) - 3y(0) + 2y(s) = \frac{\alpha}{s}$$
$$s^3y(s) + 3s^2y(s) + 2sy(s) = s^2\beta + s\gamma + 3s\beta + \alpha$$
$$y(s) = \frac{\beta s^2 + (3\beta + \gamma)s + \alpha}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha}{2s} + \frac{2\beta + \gamma - \alpha}{s+1} + \frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{2(s+2)}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse on obtient y(t) :

$$y(t)=\left(\frac{\alpha}{2}+(2\beta+\gamma-\alpha)e^{-t}+\frac{\alpha-2\beta-2\gamma}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

b) $\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$, $x(t) = 0$;

$$y(t)=e^{-t}$$

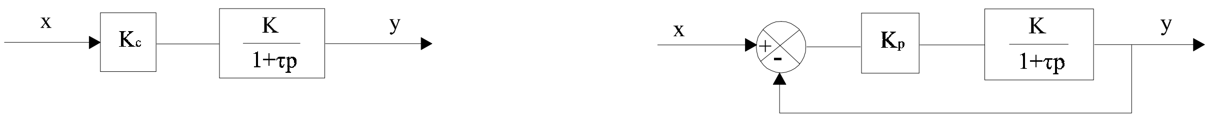
c) $\frac{d^3y(t)}{dt^3}+6\frac{d^2y(t)}{dt^2}+11\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$, $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

$$y(t) = \left(\frac{7}{6}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)u(t)$$

Exercice 3

Sensibilité vis à vis des paramètres

On considère les systèmes en boucles ouverte et fermée suivants :



On prend $K_c=K=1$ et $K_p=10$.

a) Déterminer l'erreur à un échelon de position unitaire dans les deux situations.

Rappel

Gain statique H(0) – la valeur de la fdt pour p=0.

En régime permanent

$y_\infty = H(0)*x$, avec x = constante

a1) En boucle ouverte

$$H(0) = K_cK,\quad y_\infty = H(0)*x = K_cK*1 = K_cK = 1$$

On obtient donc l'erreur :

$$e_0 = x - y_\infty = 1 - 1 = 0.$$

a2) En boucle fermée

$$H_{BF} = \frac{K_p \frac{K}{1+\tau p}}{1 + K_p \frac{K}{1+\tau p}} = \frac{KK_p}{\tau p + KK_p + 1} \rightarrow H_{BF}(0) = \frac{KK_p}{1 + KK_p} \rightarrow y_\infty = \frac{10}{11}$$

L'erreur :

$$e_0 = x - y_\infty = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}.$$

b) Le processus ayant été mal identifié, la valeur réelle du gain *K* s'avère être *K'=K+ΔK*, avec Δ*K*=0,1. Que deviennent les erreurs de position précédentes ?

b1) En boucle ouverte

$$H'(0) = K_cK' = K_cK + K_c\Delta K,\quad y'_\infty = H'(0)*x = y'_\infty + K_c\Delta K$$

On obtient donc l'erreur :

$$e'_0 = x - y'_\infty = e_0 - K_c\Delta K \rightarrow e'_0 < e_0$$

a2) En boucle fermée

$$H'_{BF}(0) = \frac{K'K_p}{1 + K'K_p} \rightarrow y_\infty = \frac{11}{12}$$

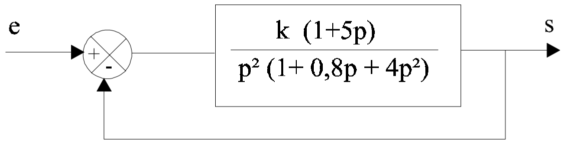
L'erreur :

$$e'_0 = x - y'_\infty = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \rightarrow e'_0 < e_0$$

Exercice 4

Etude de la stabilité par le critère de Routh

Etudier la stabilité du système suivant en fonction du paramètre k:



En utilisant le critère de Routh on obtient :

$k \in (0, 0.0336)$