ISEN 4 **Le 8 novembre 2006**
Sans Document
Avec Calculatrice
Durée 2 Heures

SYSTEMES NUMERIQUES

Les questions seront traitées dans l'ordre et correctement numérotées.

Exercice 1 – QCM (10points)

(Bonne réponse : 1 ; Pas de réponse : 0 ; Mauvaise réponse : -0.5)

1. Quelle est l'erreur de vitesse du système représenté par la fonction de transfert en boucle ouverte : $H_{BO}(z) = \dfrac{z-a}{(z-1)(z-b)}$ lorsqu'on l'asservi par un retour unitaire (T=1s) :

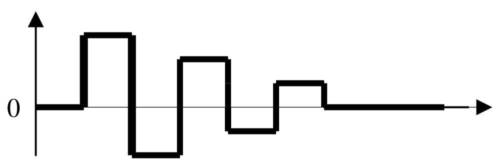
a. nulle
b. $\dfrac{(1-b)}{(1-a)}$
c. infinie

2. Le système régit par l'équation aux différences $y(k) = 0{,}5\,y(k-1) + 1{,}5\,u(k)$ où u(k) est l'entrée et y(k) la sortie est :

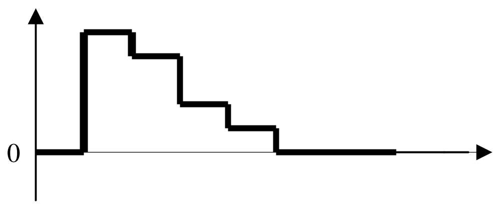
a. stable
b. instable
c. à la limite de stabilité

3. La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre de fonction de transfert $G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1{,}5}{(z+0{,}5)}$ a pour allure :

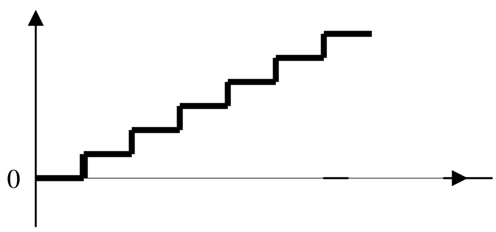
a.



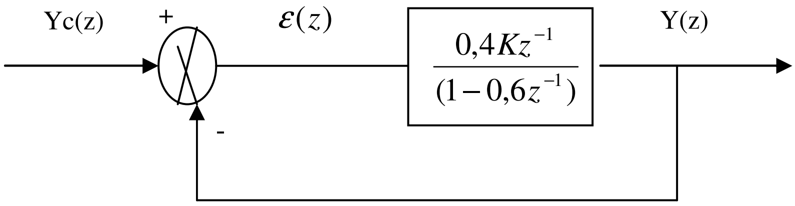
b.



c.



4. On considère le système suivant :



où K>0.
Le système bouclé est stable si :

a. $1 < K < 4$
b. $1.5 < K < \infty$
c. $0 < K < 4$

5. On considère un procédé continu de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{1+p}$ précédé par un BOZ et un régulateur numérique proportionnel de gain K>0 cadencé à la période d'échantillonnage T_e=0,5 s. Pour quelle valeur de K, l'erreur statique est de 10% lorsque l'entrée est un échelon unitaire?

a. 1.11
b 9
c. 10

6. Le système dont le dénominateur de la F.T.B.F est $D(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ est :

a. instable
b. stable
c. à la limite de stabilité

7. La fonction de transfert en Boucle Fermée d'un système de fonction de transfert échantillonnée : $G(z) = \dfrac{(z+0,5)}{(z-1)(z-0,5)}$ asservi par une correcteur à réponse pile en temps minimale pour une entrée en rampe s'écrit :

a. $H_{BF}(z) = z^{-1}$
b. $H_{BF}(z) = z^{-1}(2.5 - 2z^{-1} + 0.5z^{-2})$
c. $H_{BF}(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$

8. Un système du deuxième ordre a pour pulsation propre 1 rad/sec et un coefficient d'amortissement égal à 0.5. Les pôles du système discret équivalent de période d'échantillonnage 0.1 sec sont :

a. $z_{1,2} = 0,6414 \pm 1.2841\text{j}$
b. $z_{1,2} = 0,9477 \pm 0.0823\text{j}$
c. $z_{1,2} = 0.4525 \pm 0.1421\text{j}$

9. Un système échantillonné a le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

La fonction de transfert de ce système est :

a. $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2+z+1}$

b. $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2+1}$

c. $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z^2-z+1}$

10. La matrice N = e^{AT} obtenue par l'échantillonnage par un bloqueur d'ordre zéro d'un système décrit par un modèle d'état continu $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est :

a. $N = \begin{bmatrix} T & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & T & T \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}$

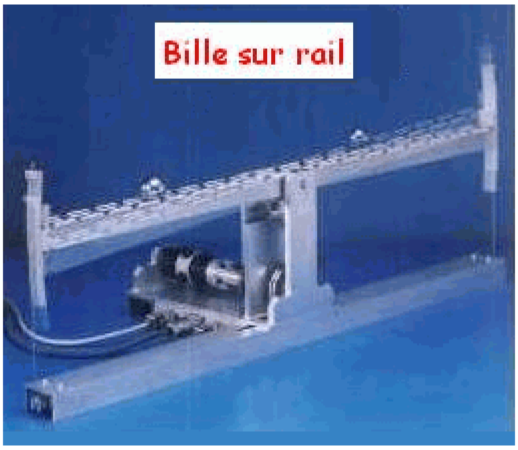
b. $N = \begin{bmatrix} 0 & e^T & 0 \\ 0 & 0 & e^T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $N = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EXERCICE 2 : ETUDE D'UNE BILLE SUR UN RAIL (10 pts)

OBJECTIF

Il s'agit dans cette étude de mettre au point un régulateur numérique par la méthode des pôles dominants sur un système comportant une constante de temps, un intégrateur et un zéro.
Le procédé étudié se compose d'une barre rigide portant un rail, mobile autour d'un axe horizontal, et d'une bille roulant sur ce rail.
L'inclinaison de la barre est assurée par un moteur à courant continu, lié à la barre par un engrenage entraînant un système de câbles.



On cherche à déterminer le réglage d'un correcteur numérique pour stabiliser la bille à la position voulue sur le rail. Le centre du rail est pris comme origine. La variable d'action est l'inclinaison de la barre. La variable de sortie est la position de la bille. La sortie du calculateur numérique alimente la tension de commande du moteur à courant continu, par l'intermédiaire d'un bloqueur d'ordre zéro cadencé à la période d'échantillonnage de 0,2 sec. La fonction de transfert discrète en boucle ouverte est :

$$G(z) = g_0 \frac{(z-b)}{(z-1)(z-a)}$$

avec : b = 0.96 ; a = 0.89 ; g_0 = 0.24.

QUESTION

Déterminer le correcteur qui permet d'obtenir en boucle fermée un pôle dominant double, garantissant le comportement d'un système d'ordre un avec une constante de temps de 1s, et qui assure une erreur de position nulle vis à vis d'une variation de perturbation en échelon et une erreur de vitesse de 1%.

On donnera l'équation aux différences de la loi de commande.

EXERCICE 3 : Question bonus (2 pts)

Calculer la fonction de transfert échantillonnée d'un système décrit par la fonction de transfert :

$$F(s) = \frac{e^{-7s}}{1+2s}$$

en sachant que le système est échantillonné à l'aide d'un BOZ de période d'échantillonnage T égale à 2s.

H(s)	$H(z^{-1})$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
$\frac{G}{1 + sT}$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$ $b_1 = G(1 - e^{-T_e/T})$ $a_1 = - e^{-T_e/T}$
$\frac{G e^{-sL}}{1 + sT}$ $L < T_e$	$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1}}$ $b_1 = G(1 - e^{(L-T_e)/T})$ $b_2 = Ge^{-T_e/T}(e^{L/T} - 1)$ $a_1 = - e^{-T_e/T}$
$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\,\zeta\,\omega_0\, s + s^2}$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}\ (\zeta < 1)$	$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ $b_1 = 1 - \alpha\left(\beta + \frac{\zeta\,\omega_0}{\omega}\partial\right)$ $b_2 = \alpha^2 + \alpha\left(\frac{\zeta\,\omega_0}{\omega}\partial - \beta\right)$ $a_1 = -2\,\alpha\,\beta$; $a_2 = \alpha^2$ $\alpha = e^{-\zeta\omega_0 T_e}$; $\beta = \cos(\omega T_e)$; $\partial = \sin(\omega T_e)$

Discrétisation d'un procédé avec bloqueur d'ordre zéro.

QUESTIONNAIRE de l'EXERCICE 1

Document à remettre obligatoirement

Nom :
Prénom :
Groupe :

Réponse / ***N° Question***	***a***	***b***	***c***
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

FORMULAIRE

Définition de la transformée en Z

$$S(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} s(k) z^{-k}$$

Propriétés de la transformée en Z

Linéarité : $Z[\lambda x(k) + \mu y(k)] = \lambda Z[x(k)] + \mu Z[y(k)]$

Retard : $Z[x(k-n)] = z^{-n} X(z)$

Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{k\to\infty} x(k) = \lim\limits_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) X(z)$

Théorème de la convolution discrète : $Z\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) y(n-k)\right] = X(z)Y(z)$

Calcul de la transformée de Fourier : $H_N(\nu) = H(z = e^{2j\pi\nu/\nu e})$

Calcul de la transformée en Z : méthode des résidus

$$X(z) = \sum_{p_i} Résidus\ de\ \left.\frac{X(p)}{1 - e^{pT} z^{-1}}\right|_{p=p_i}, \quad X(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$ et p_i : les pôles de la fdt

Si p_i est un pôle simple

$$r_i = \frac{N(p_i)}{\frac{d}{dp}\left[D(p)\left(1 - e^{pT} z^{-1}\right)\right]_{p=p_i}}$$

Si p_i est un pôle multiple, d'ordre de multiplicité n

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left[(p - p_i)^n X(p) \frac{1}{\left(1 - e^{pT} z^{-1}\right)}\right]\right\}_{p=p_i}$$

Choix de la fréquence d'échantillonnage T

Système en BF du premier ordre : $t/4 < T < t$

Système en BF du second ordre : $0.25 < \omega_0 T < 1.5$, $0.7 \leq \zeta \leq 1$

où t est la constante de temps du système du premier ordre en BF, ω_0 est la pulsation naturelle et ζ le coefficient d'amortissement du système du second ordre en BF.

Transformée en w

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

Régulateur PID numérique

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$
$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - s_1 z^{-1})$$

Système d'équations pour le calcul des paramètres du PID numérique

$$\begin{cases} p_1 = a_1 - s_1 - 1 + b_1 r_0 \\ p_2 = s_1(1-a_1) - a_1 + a_2 + b_1 r_1 + b_2 r_0 \\ 0 = s_1(a_1 - a_2) - a_2 + b_1 r_2 + b_2 r_1 \\ 0 = a_2 s_1 + b_2 r_2 \end{cases}$$

Paramètres du PID continu équivalent

$$K = \frac{-r_0 s_1 - r_1 - (2-s_1) r_2}{(1-s_1)^2},\ T_i = T\frac{K(1-s_1)}{r_0 + r_1 + r_2},\ T_d = T\frac{r_0 s_1^2 + s_1 r_1 + r_2}{K(1-s_1)^3},\ \frac{T_d}{N} = \frac{s_1 T}{1-s_1}$$

Équation régulière, solution minimale

L'équation AX + BY = C est dite régulière si degC < degA + degB

On a simultanément les solutions minimales telles que :

$$\deg X_{min} = \deg B - 1$$

$$\deg Y_{min} = \deg A - 1$$

Équation non régulière

C'est le cas lorsque degC ≥ degA + degB.

Dans ce cas, il existe deux solutions minimales distinctes.

Première solution (minimale en X)

$$\deg X_{min} = \deg B - 1$$

$$\deg Y = \mathrm{Max}[(\deg C - \deg B),(\deg B - 1)]$$

Et

Deuxième solution (minimale en Y)

$degY_{min} = degA - 1$

$degX = Max[(degC - deg\ A),(degA - 1)]$

Transformée en Z d'une fdt H(s) continue en utilisant un BOZ

$$H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) Z\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

Polynôme caractéristique d'un système continu d'ordre 2

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

Transformée en Z inverse de quelques fonctions de base

Pôles de X(z)	**Élément simple**	**Original x(k), k>0**
Réel simple $z = p$	$\frac{z}{z - p}$	p^k
Réel double $z_1 = z_2 = p$	$\frac{z}{(z - p)^2}$	kp^k
Complexes conjugués $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \rho\, e^{\pm i\theta}$	$\frac{z(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$ $\frac{z\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$	$\rho^k \cos(k\theta)$ $\rho^k \sin(k\theta)$

Transformée en Z de quelques fonctions de base

G(p)	G(t)	G(z)
$\frac{1}{p}$	u(t)	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$t^2/2\,!$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{\left(1-e^{-aT}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}$
$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{z\,\sin(\omega_0 T)}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$
$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{z[z-\cos(\omega_0 T)]}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$
$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(\omega_0 T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$