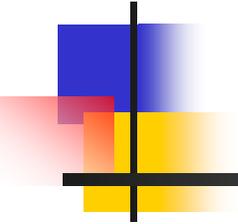
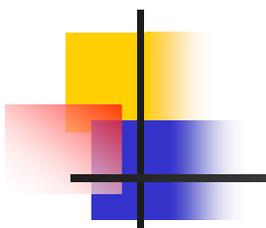


Echantillonnage, signaux discrets et transformée de Fourier discrète

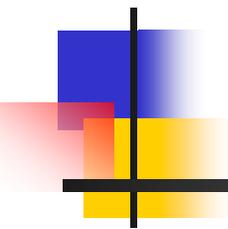




Plan

- Rappels: échantillonnage, signaux discrets (1 séance)
- Introduction de la TFD (1 séance)
- Améliorations de la TFD: fenêtrage , FFT (1 séance)

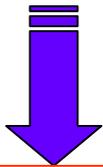
Echantillonnage et signaux discrets



Numérisation d'un signal
Etude de l'échantillonnage
Correspondance continu-discret

Numérisation d'un signal (1/16)

Signal - fonction continue de t



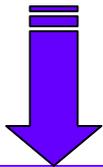
Numérisation



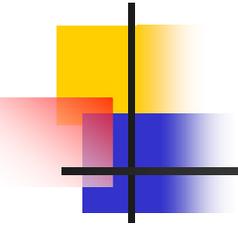
Echantillonnage

+

Quantification



Traitement sur un processeur
(ordinateur)



Numérisation d'un signal (2/16)

- Définition de l'échantillonnage :
 - $x(t)$ = signal d'amplitude continue d'argument t continu (= signal analogique)
 - $\{t_n\}$ suite d'instantants

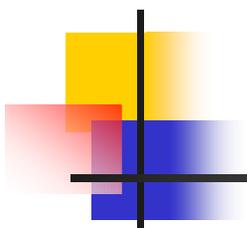
⇒ la suite $\{x(t_n)\}$ est un signal échantillonné

Signal d'amplitude
continue



Signal défini en certain
instants seulement





Numérisation d'un signal (3/16)

- Quelques définitions :

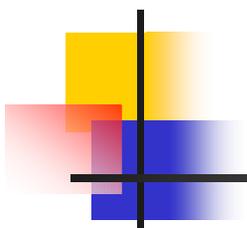
- $x(t_n)$ = un échantillon

- échantillonnage : opération permettant de passer de $x(t)$ à $\{x(t_n)\}$

Si $t_{n+1} - t_n = T_e$ l'échantillonnage est dit régulier

$T_e =$ période d'échantillonnage

$v_e = 1/T_e =$ fréquence d'échantillonnage



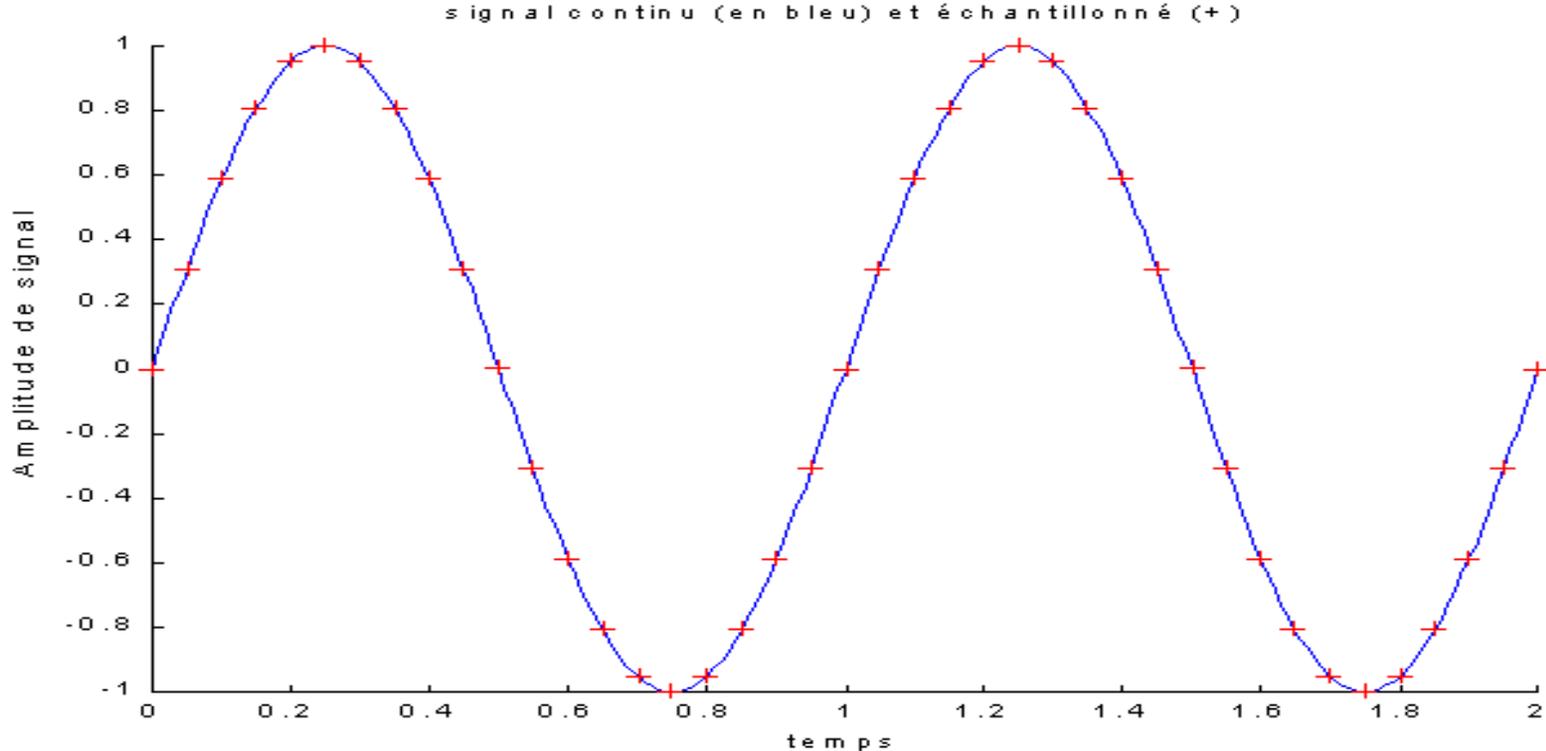
Numérisation d'un signal (4/16)

- Exemple



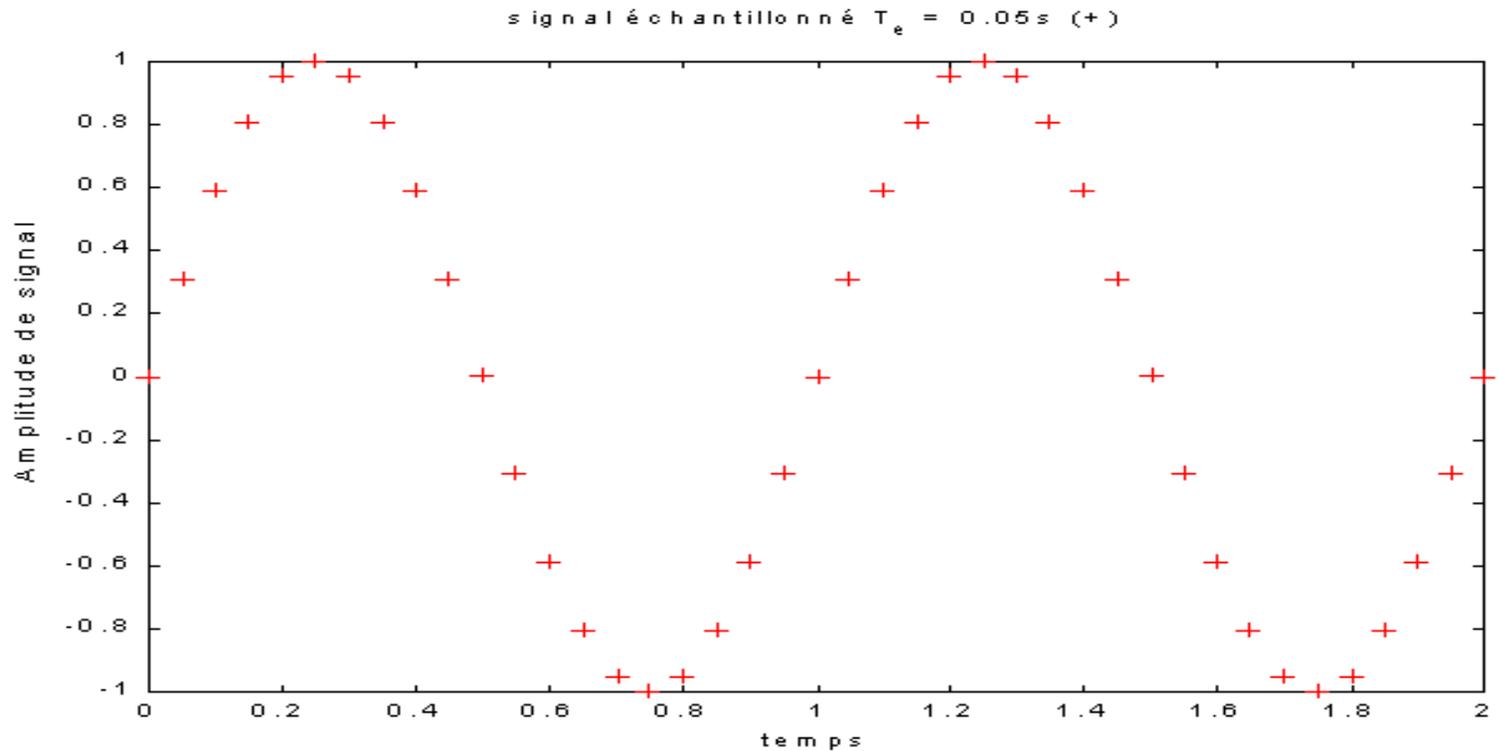
Numérisation d'un signal (5/16)

Illustration de l'échantillonnage (1/2)



Numérisation d'un signal (6/16)

Illustration de l'échantillonnage (2/2)



Numérisation d'un signal (7/16)

- Définition de la quantification :
 - $x(t)$ = signal d'amplitude continue d'argument t continu (= signal analogique)

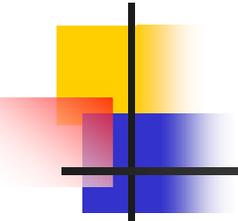
$\{xq_k\}$ suite d'amplitudes $k \in \mathbb{Z}$

Soit $\{x_q(t)\}$ le signal tel que : $x_q(t) \in \{xq_k\}$

Signal quantifié

temps continu

Signal défini en certaines amplitudes seulement

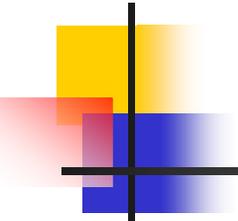


Numérisation d'un signal (8/16)

- Définition de la quantification :
 - **quantification** : opération permettant de passer de $x(t_n)$ à $\{xq(t_n)\}$ c'est à dire un ensemble de valeurs discontinues prédéfinies

Si $xq_{k+1} - xq_k = q$ la quantification est dite **uniforme**

$q =$ **pas de quantification**



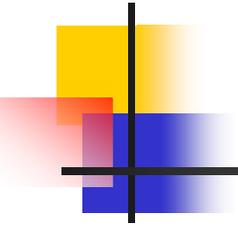
Numérisation d'un signal (9/16)

- Exemple de règle de quantification uniforme:
 - La troncature

$$x(t) \in [kq; (k + 1)q[\Rightarrow x_q(t) = kq$$

- L'arrondi

$$x(t) \in [(k - \frac{1}{2})q; (k + \frac{1}{2})q[\Rightarrow x_q(t) = kq$$



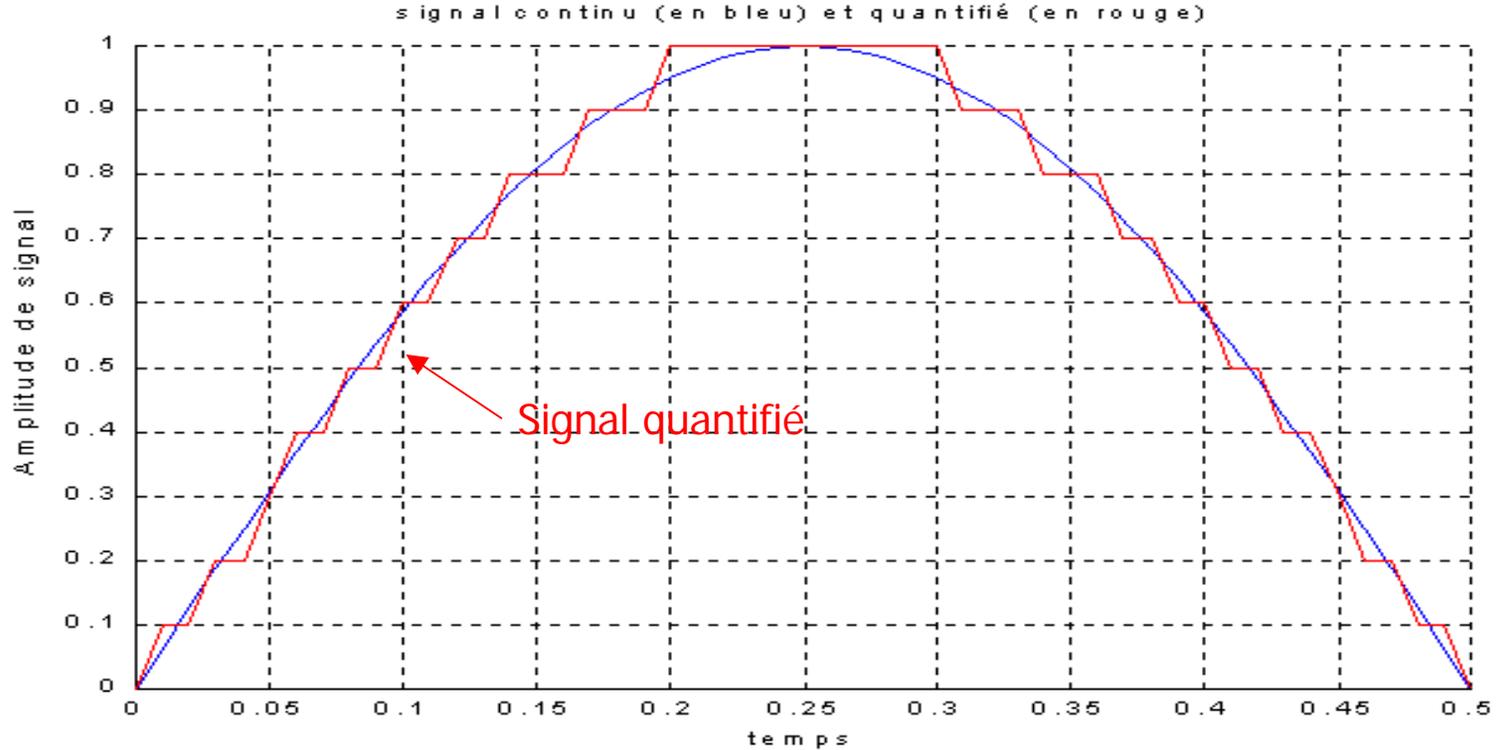
Numérisation d'un signal (10/16)

- Exemple



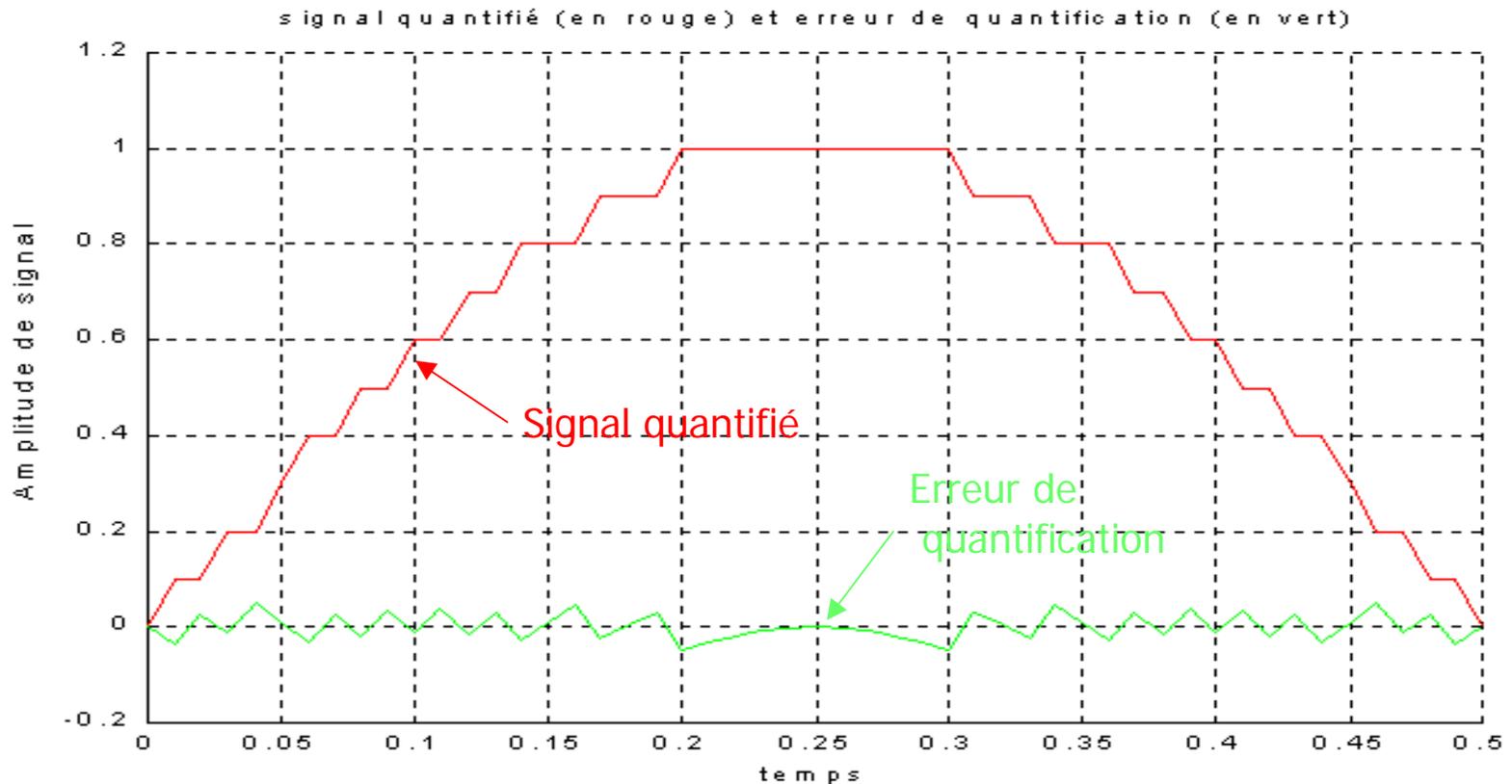
Numérisation d'un signal (11/16)

Illustration de la quantification (1/2)



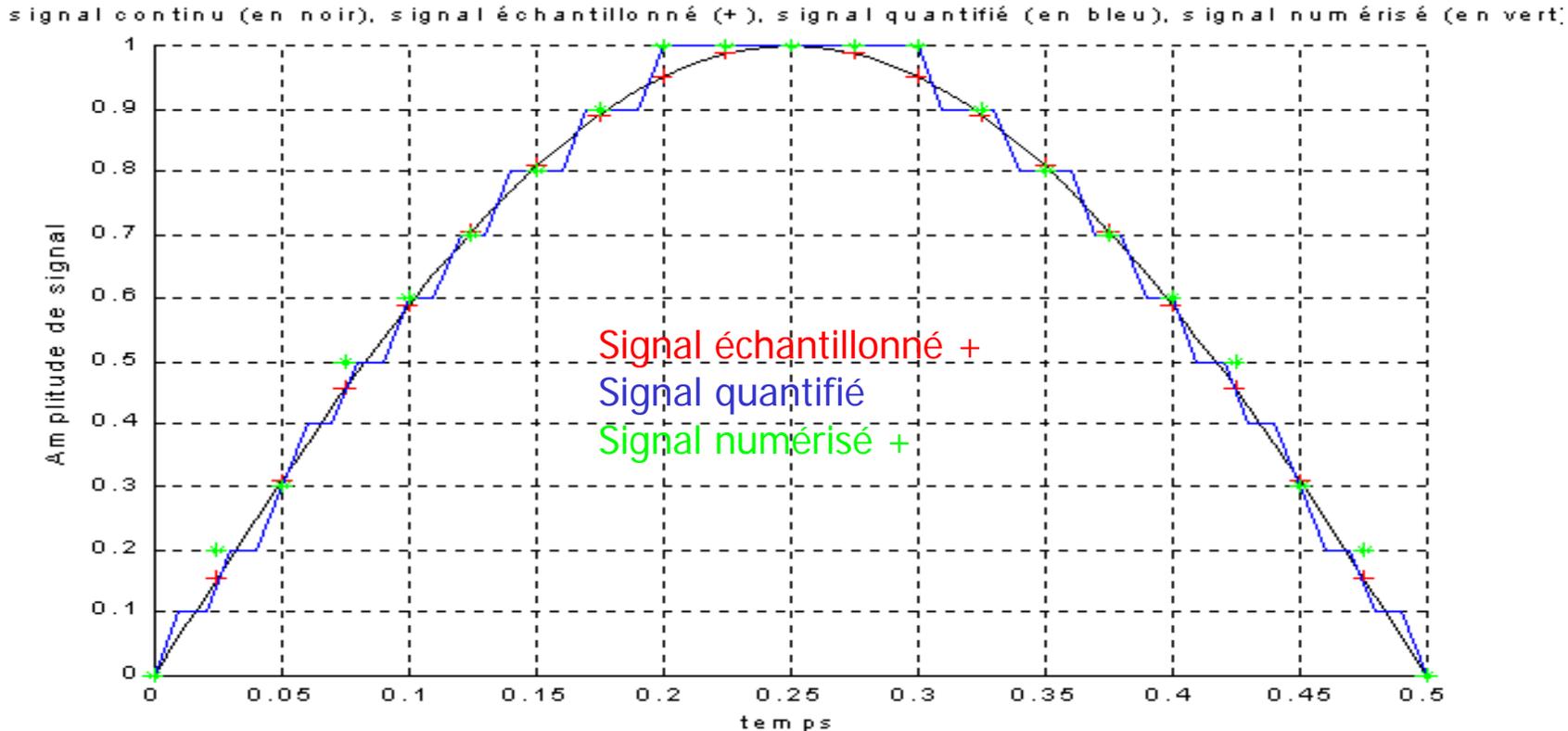
Numérisation d'un signal (12/16)

Illustration de la quantification (2/2)



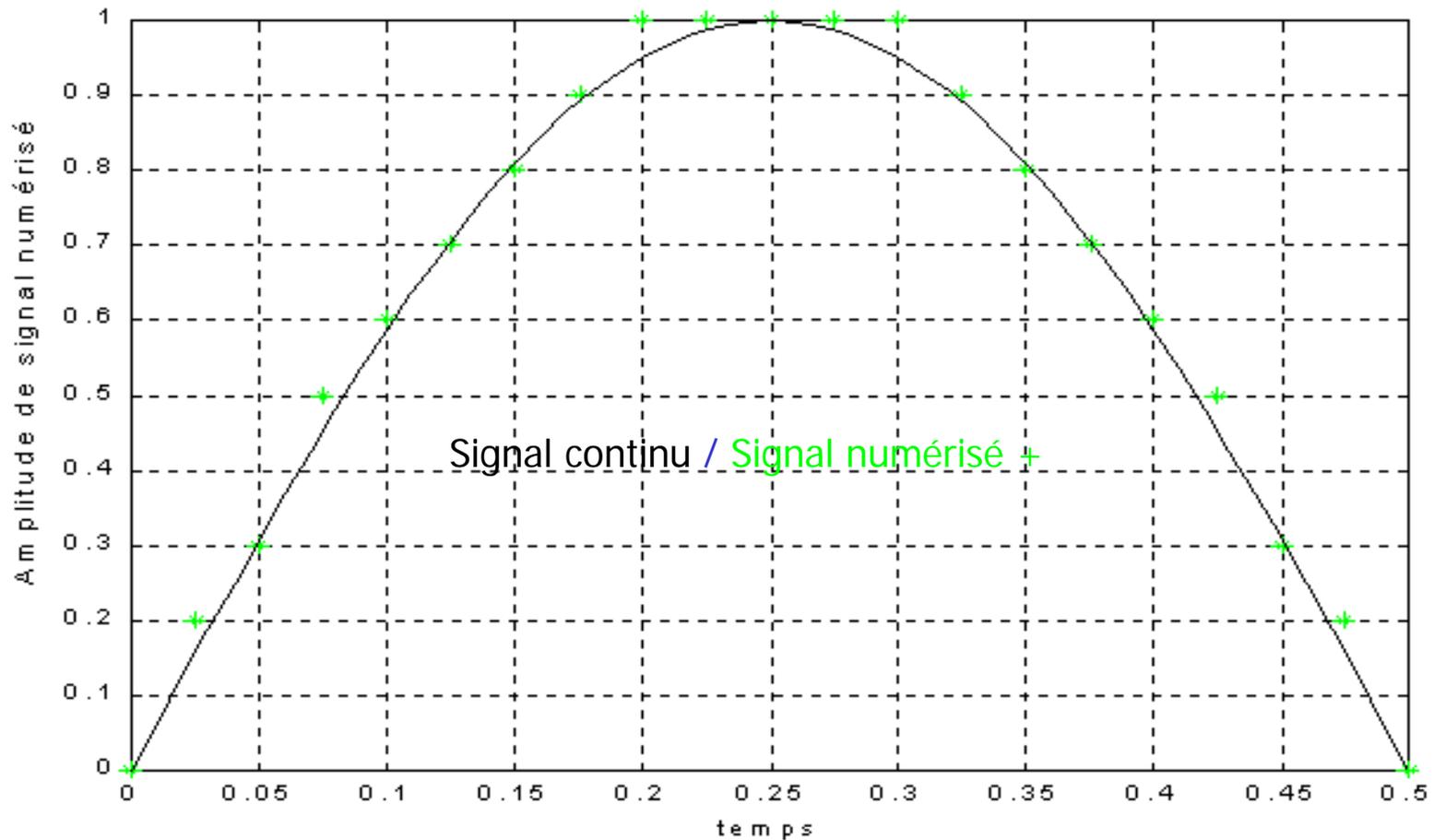
Numérisation d'un signal (13/16)

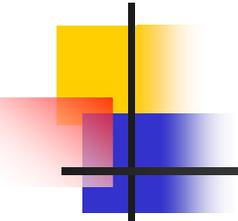
- Numérisation = Echantillonnage + Quantification



Numérisation d'un signal (14/16)

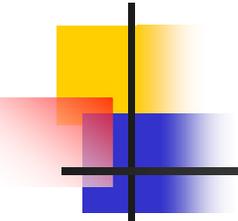
signal numérisé (*) $T_e = 0.025s$ et pas de quantification de 0.1 et signal continu (en noir)





Numérisation d'un signal (15/16)

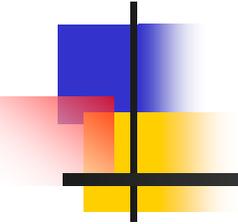
- Numérisation = possibilité de traitement sur ordinateur
- La numérisation entraîne :
 - Dégradation et Distorsion du signal
 - Perte d 'information sur le phénomène physique initial
- => Possibilité d 'une **analyse erronée** du phénomène physique



Numérisation d'un signal (16/16)

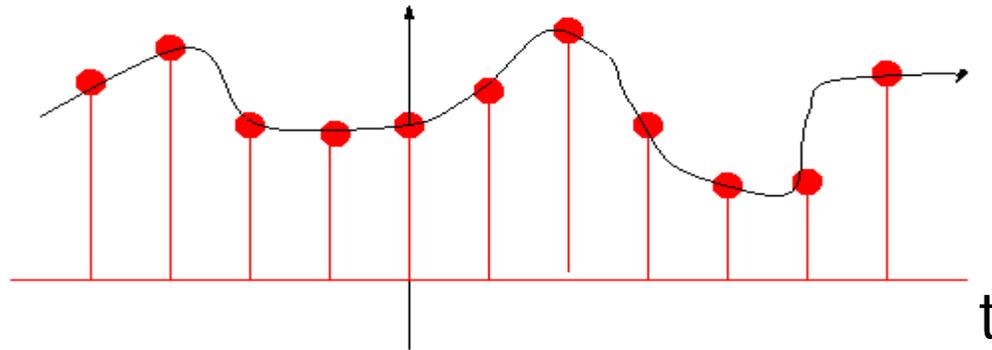
- Il faut analyser et connaître les distorsions introduites par la numérisation
- Dans ce cours, on se limite aux distorsions introduites par l'échantillonnage:
 - Modélisation mathématique
 - Conséquences sur le spectre : « aliasing »
 - Comment « bien » échantillonner ?

Etude de l'échantillonnage (1/12)

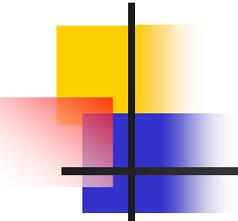


Etude de l'échantillonnage (2/12)

- Modélisation de l'échantillonnage :
 - Signal échantillonné défini en des instants particuliers = ensemble de mesure nulle



- Le résultat fait penser à une distribution de type peigne de Dirac



Etude de l'échantillonnage (3/12)

- Modélisation de l'échantillonnage :
 - $x(t)$ considéré comme définissant une distribution
 - $W(t)$ le peigne de dirac défini par :

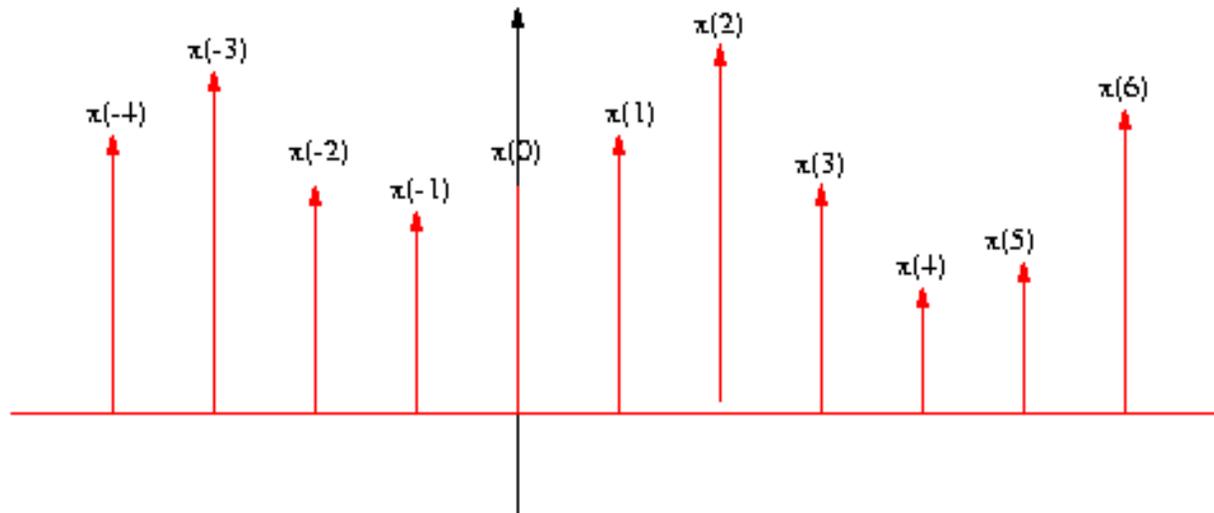
$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

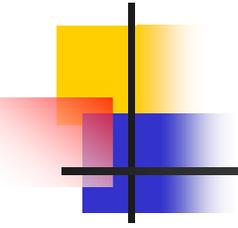
$$x_e(t) = x(t)W(t)$$

= distribution qui modélise le signal échantillonné

Etude de l'échantillonnage (4/12)


$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$





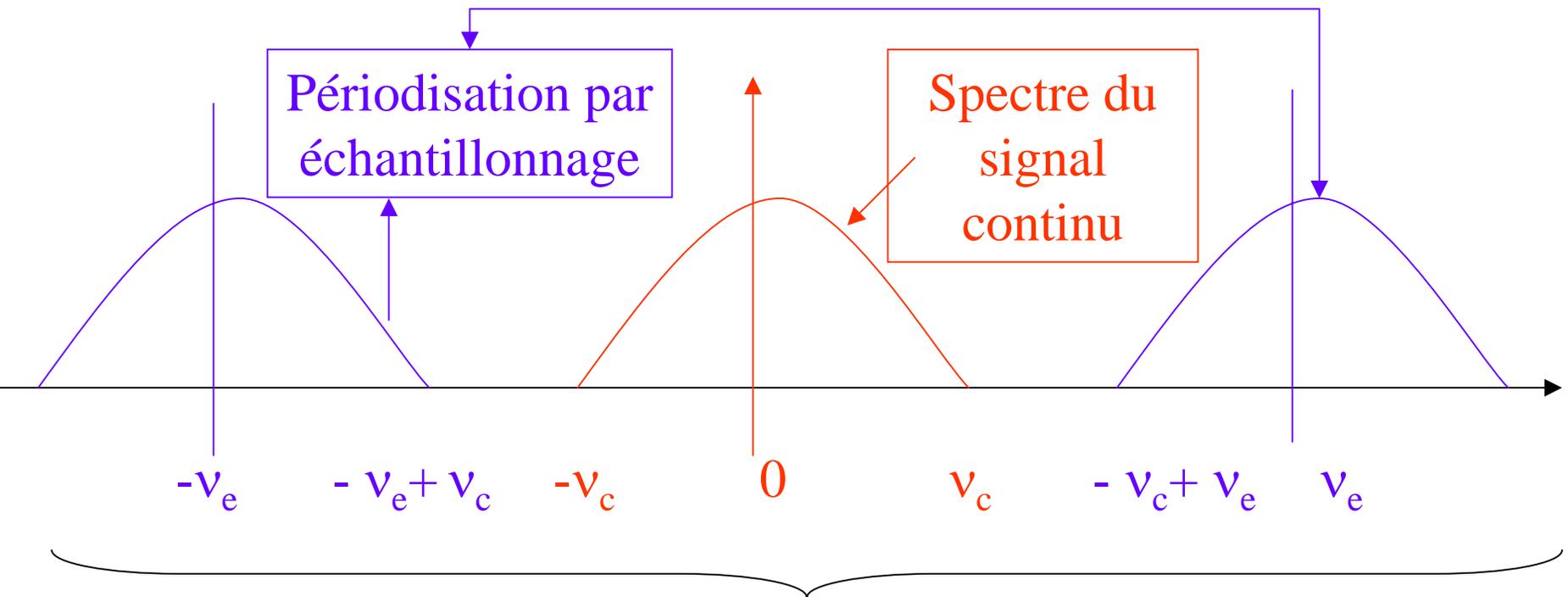
Etude de l'échantillonnage (5/12)

- Spectre du signal échantillonné :



Etude de l'échantillonnage (6/12)

- Spectre du signal échantillonné :

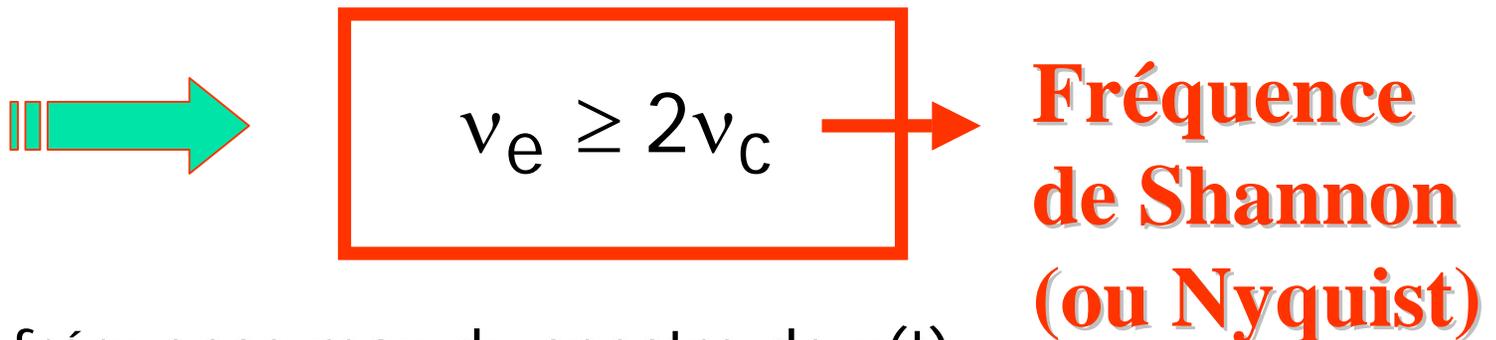


Il **faut** faire la **somme** de tous les spectres

Etude de l'échantillonnage (7/12)

- Pour éviter de perdre de l'information il faut conserver dans le spectre du signal échantillonné le spectre du signal continu
 - C'est à dire :

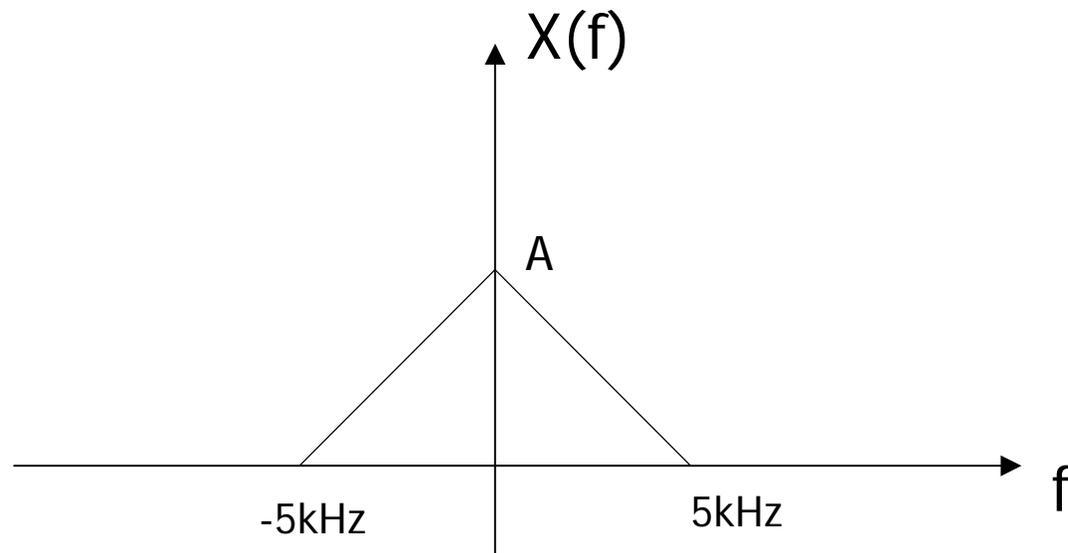
$$v_e - v_c \geq v_c \quad (X(v_c) = 0)$$



v_c est la fréquence max du spectre de $x(t)$

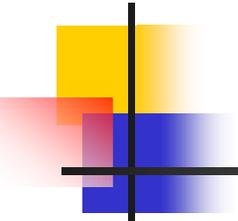
Etude de l'échantillonnage (8/12)

- Exercice : soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est représentée ci dessous. Tracer l'allure de la transformée de Fourier de $x(t)$ après échantillonnage.







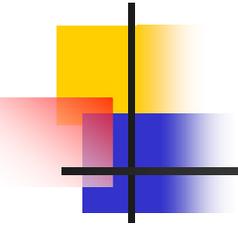


Etude de l'échantillonnage (10/12)

- Limites pratiques du théorème de l'échantillonnage
 - Le spectre du signal est rarement parfaitement connu à l'avance
 - Un signal réel est rarement à bande limitée : il n'existe pas de fréquence ν_c telle que :


$$\forall |\nu| > |\nu_c| \quad X(\nu) = 0$$

On utilise alors un filtre anti-repliement (anti-aliasing) pour atténuer fortement les fréquences supérieures à une fréquence ν_c donnée.

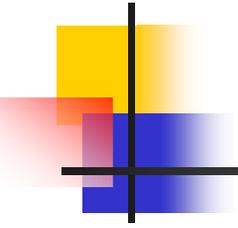


Etude de l'échantillonnage (11/12)

■ Echantillonnage pratique

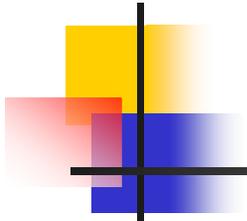
- En pratique un échantillonneur est réalisé à l'aide d'une porte analogique qui s'ouvre un court instant τ pendant lequel le signal $x(t)$ est mis en mémoire
- Aussi petit que soit τ , ce n'est pas $x(kT_e)$ qui est mis en mémoire mais une certaine fonction de $x(t)$ entre les instants $(kT_e - \tau)$ et kT_e

$$x_k = \int_{kT_e - \tau}^{kT_e} x(u) du$$



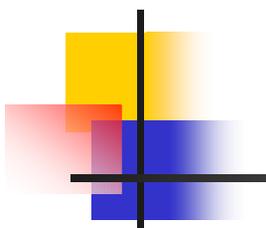
Etude de l'échantillonnage (12/12)

- Echantillonnage moyeneur :
 - On met en mémoire
 - Tout se passe comme si le signal $x(t)$ était filtré par un filtre intégrateur à moyenne glissante sur la durée τ
- Échantillonnage maintien
 - On retient la valeur du milieu de l'intervalle sur toute la durée τ
- Echantillonneur bloqueur
 - Cas particulier de l'échantillonneur maintien avec $\tau = T_e$ (réalisé par les CAN)



Adaptation des concepts de base (1/3)

Propriétés spectrales et énergétiques des
signaux déterministes discrets



Adaptation des concepts de base (2/3)

- L'ensemble des concepts de base du traitement du signal s'applique aux signaux discrets.
- Il existe une correspondance entre les définitions : continu-discret.

Signaux continus

Energie:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

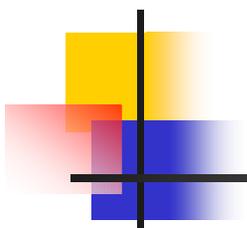
Puissance
Moyenne:

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

Signaux Discrets

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=+N} |x(n)|^2$$



Adaptation des concepts de base (3/3)

- Fonction d'intercorrélation:

Signaux continus

Energie finie:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

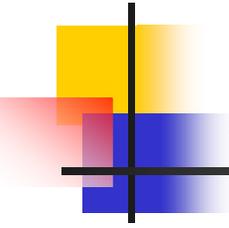
Puissance finie:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Signaux Discrets

$$C_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)x^*(n-m)$$

$$C_{xy}(m) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{n=+N} x(n)x^*(n-m)$$



Adaptation des concepts de base (4/3)

- Même principe de correspondance pour les signaux numériques:

Densité spectrale
(Signaux continus)

$$\gamma_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(\tau) \cdot e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau$$

Densité spectrale
(Signaux discrets)

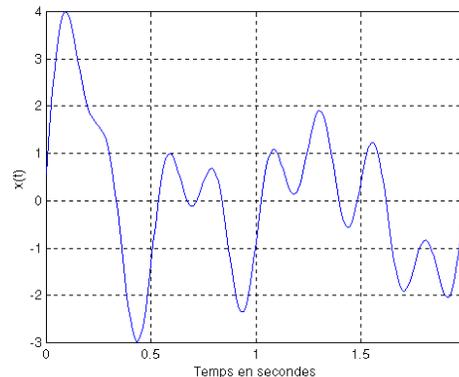
$$\gamma_x(r) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{xx}(n) e^{-2\pi i n r}$$

Hors programme

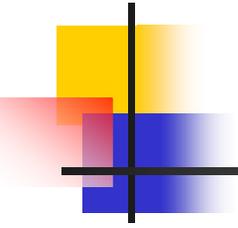
Rappels (1)

■ 1er Cours:

- **Insuffisance** de la représentation temporelle $x(t)$
=> importance de la transformée de Fourier (spectre).



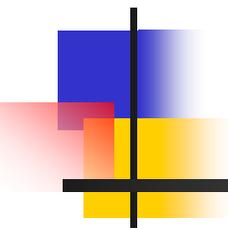
- Rappels sur la transformée de Fourier (continu)



Rappels (2)

- 2ème Cours:

- Nécessité d'obtenir des signaux numériques (processeur)
- Signaux numériques: échantillonnage+quantification
- Condition d'échantillonnage: théorème de Shannon
- Spectre d'un signal échantillonné (périodisation en fréquence)



La TFD

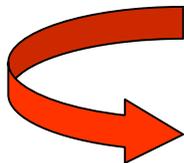
Calcul d'un spectre sur processeur

Vers la TFD

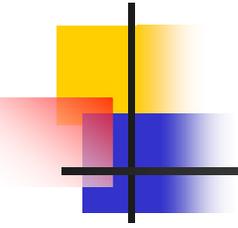
Echantillonnage fréquentiel

Comment calculer un spectre sur un processeur (1/2)?

- Transformée de Fourier:
 - calcul **exact** du spectre
 - connaissance du **signal continu** de **moins l'infini à plus l'infini**
 - le **résultat est une fonction continue**
- Elle est difficilement **implémentable** sur un processeur

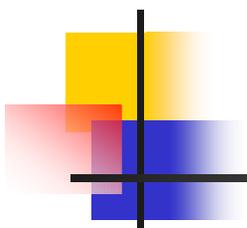


Introduction de la TFD...



Comment calculer un spectre sur un processeur (2/2)?

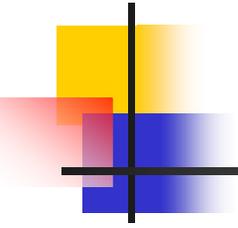
- On recherche alors un calcul approché qui soit facilement implémentable: => **Transformée de Fourier Discrète (TFD)**
- Attention! : **calcul approché** => erreurs => erreurs d'interprétations possibles => **possibilités de conclusions fausses sur le phénomène physique**
- Il faut comprendre ce qu'on manipule....



Vers la TFD (1/3)

- **Problème 1** : le signal est continu (valeur de t et amplitude)

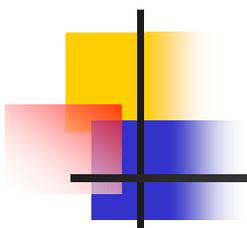




Vers la TFD (2/3)

- **Problème 2** : la sommation discrète s 'effectue encore de moins l 'infini à plus l 'infini





Vers la TFD (3/3)

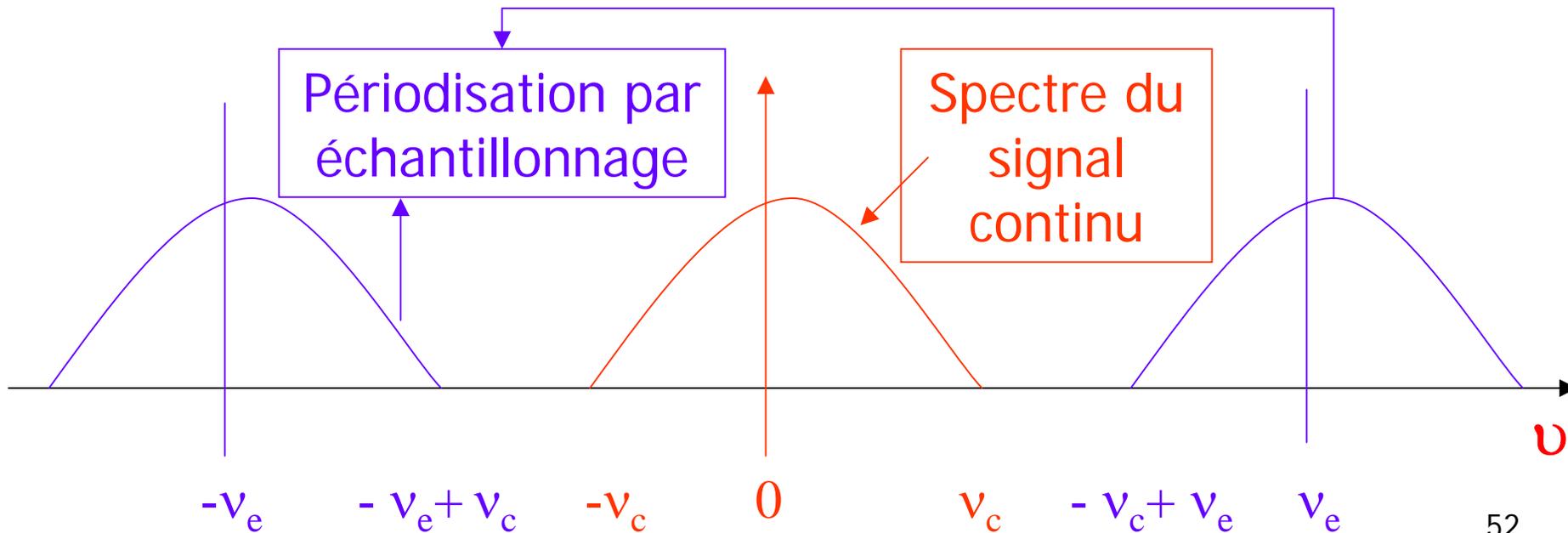
- **Problème 3** : le résultat est encore une fonction continue de la fréquence





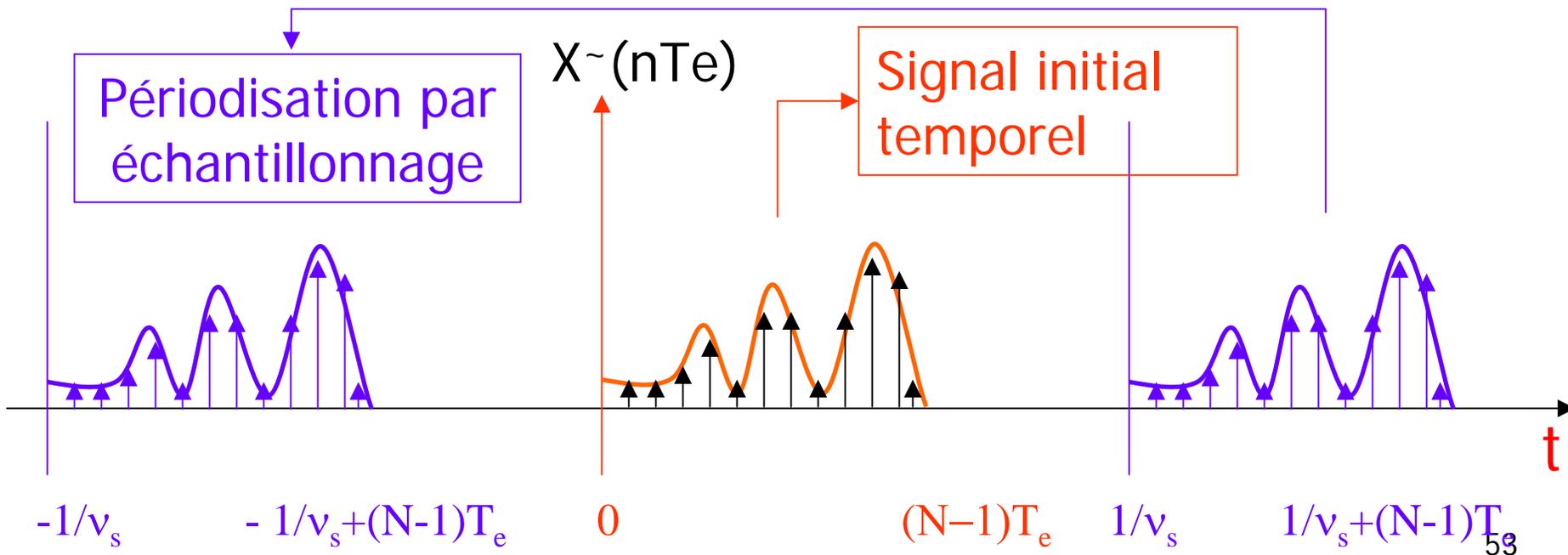
Comment choisir ν_s (1/4) ?

- L'échantillonnage temporel à $T_e=1/\nu_e$ implique la périodisation du motif spectral tous les ν_e



Comment choisir v_s (2/4) ?

- L'échantillonnage fréquentiel à $T_s = 1/v_s$ implique la périodisation du motif temporel tous les $1/v_s$



Comment choisir v_s (3/4) ?

- Il faut donc éviter les recouvrements temporels


$$(N - 1) T_e < \frac{1}{v_s}$$

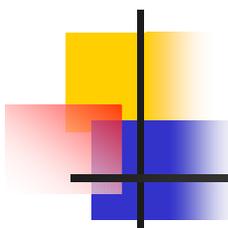
**On choisit
classiquement**

$$v_s = \frac{1}{NT_e}$$



Résolution
fréquentielle





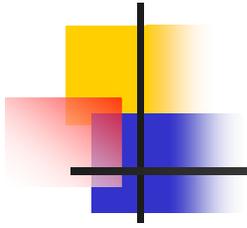
Comment choisir v_s (4/4) ?

- Pour améliorer la résolution fréquentielle on peut:

- Soit augmenter la durée du signal c'est à dire N
- Soit augmenter T_e mais en prenant garde à l'aliasing

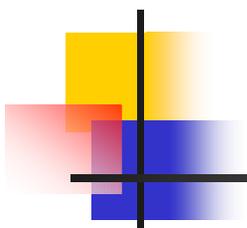
$$\Delta\nu = \frac{1}{NT_e}$$

- Une **erreur fréquente** consiste à dire qu'on améliore la résolution en complétant le signal observé par des valeurs nulles afin d'augmenter N artificiellement (**Zéro padding**): ceci améliore la finesse d'analyse mais ne modifie en aucun cas la résolution fréquentielle puisqu'on n'apporte aucune information supplémentaire



Expression finale de la TFD (1/6)





Expression finale de la TFD (2/6)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Expression de la TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2j\pi nk}{N}}$$

$$n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

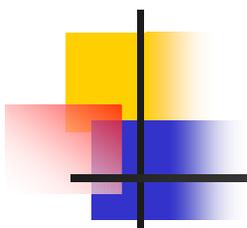
Expression matricielle de la TFD (3/6)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Ligne k+1

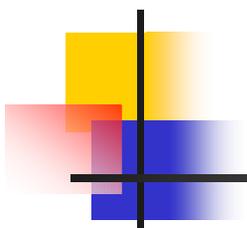
Colonne n+1

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$



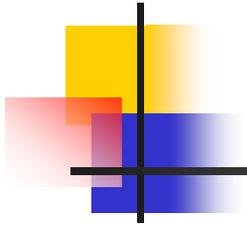
Exemple de TFD (4/6)

- $x(t) = \sin(2\pi t)$, $N = 4$ et $v_e = 4$ Hz



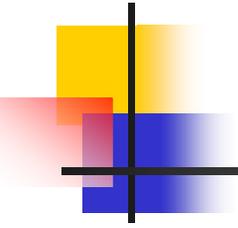
Exemple de TFD (5/6)





Exemple de TFD (6/6)





Rappels

-1^{er} cours: Insuffisance de la représentation temporelle (TF)

-2^{ème} cours: Nécessité de traiter des signaux numériques

- Signaux numériques: échantillonnage+quantification

- Condition d'échantillonnage: théorème de Shannon

- Spectre d'un signal échantillonné (périodisation en fréquence)

-3^{ème} cours: Introduction de la TFD

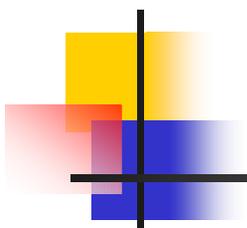
Rappels: définition de la TFD

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Ligne $k+1$

Colonne $n+1$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$



Propriétés de la TFD (1/2)

$$\text{TFD: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk} \quad k \in \{0,1,\dots,N-1\}$$

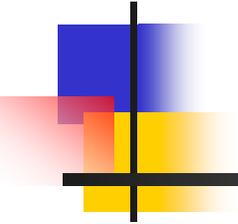
$$\text{TFD_inverse: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-nk} \quad n \in \{0,1,\dots,N-1\}$$

$$\text{avec } W = e^{-\frac{2j\pi}{N}} \quad x(n) \leftrightarrow X(k)$$

Propriétés de la TFD (2/2)

<i>Propriétés</i>	discret	TFD
Linearité	$ax(n) + by(n)$	$aX(k) + bY(k)$
Retard	$x(n-r)$	$X(k)W^{kr}$
Convolution (circulaire)	$x(n)*y(n)$	$X(k)Y(k)$
Multiplication	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N} X(k) * Y(k)$
Conjugaison	$x^*(n)$	$X^*(k)$
Théorème de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) ^2$

Conséquences du fenêtrage sur la TFD

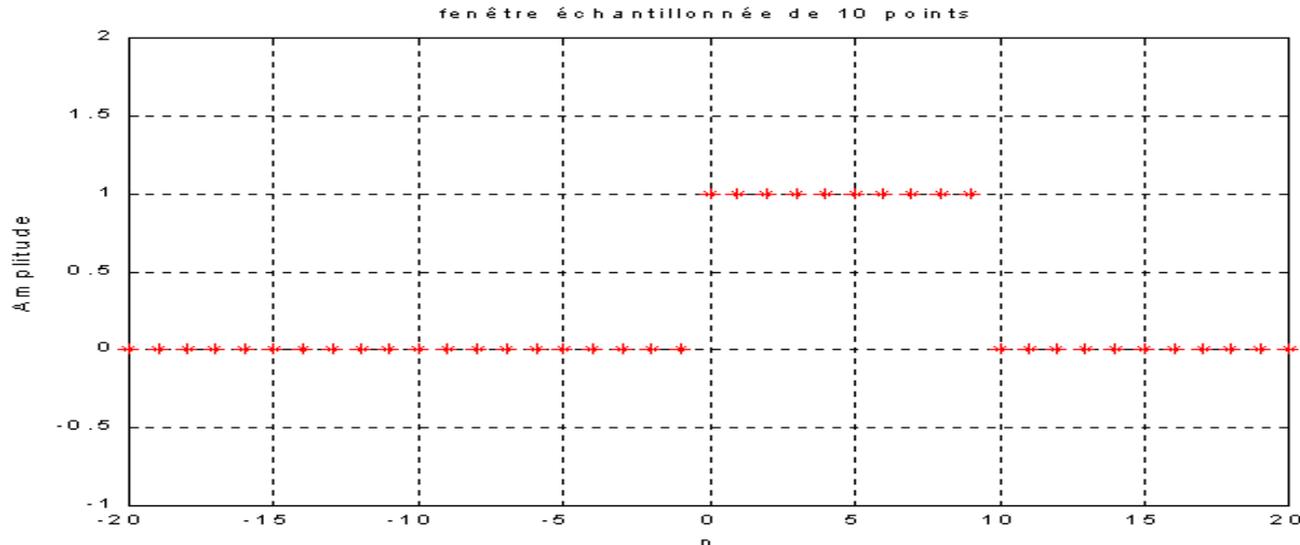


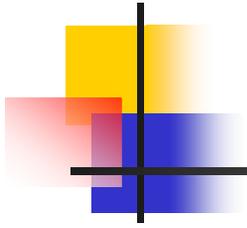
Conséquences du fenêtrage

- Soit le signal échantillonné $h(n)$ défini par:

$$h(n) = 1 \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$h(n) = 0 \quad \text{sinon}$$



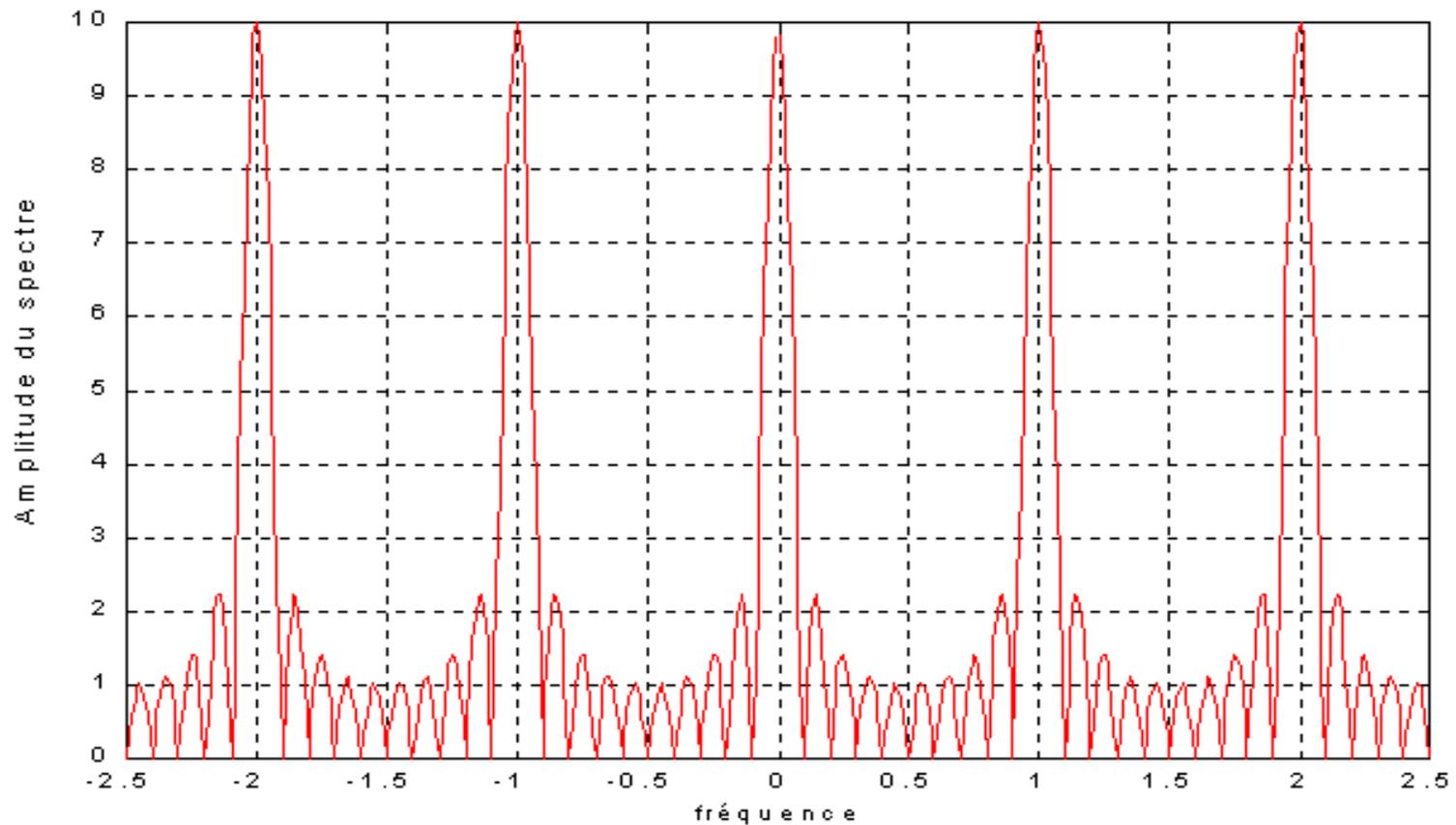


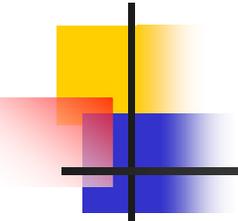
Conséquences du fenêtrage

- Le spectre du signal $h(n)$ est égal à:

Conséquences du fenêtrage

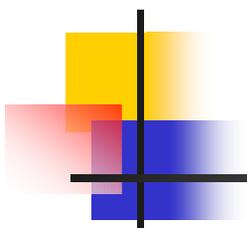
Spectre de la fenêtre échantillonnée - $N = 10$ - $f_e = 1$ Hz





Conséquences du fenêtrage

- Principales propriétés:
 - annulation pour $\nu = k\nu_e/N$ avec k entier relatif non nul
 - fonction **périodique** de période ν_e
 - Module **maximum** en $k\nu_e$ ($= N$)



Conséquences du fenêtrage

$$X_2(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2j\pi\nu nT_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)h(n)]e^{-2j\pi\nu nT_e}$$

- Par conséquent **calculer une TFD** c'est **calculer** :
 - le **spectre du signal $x(n)h(n)$** (fenêtrage ou apodisation)
 - et pas celui de $x(n)$

Distorsions apportées par la TFD

$x(n)h(n)$



Transformée
de Fourier

$$\frac{1}{v_e} \int_{-\frac{v_e}{2}}^{+\frac{v_e}{2}} X(f)H(v - f)df$$

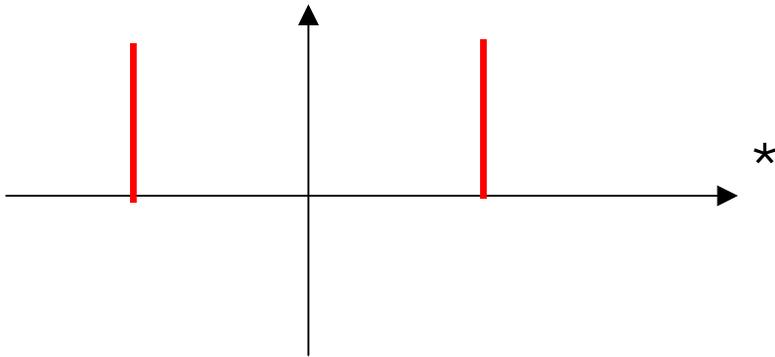


$$X_{TFD}(k) \equiv \frac{1}{v_e} \int_{-\frac{v_e}{2}}^{+\frac{v_e}{2}} X(f)H\left(\frac{kv_e}{N} - f\right)df$$

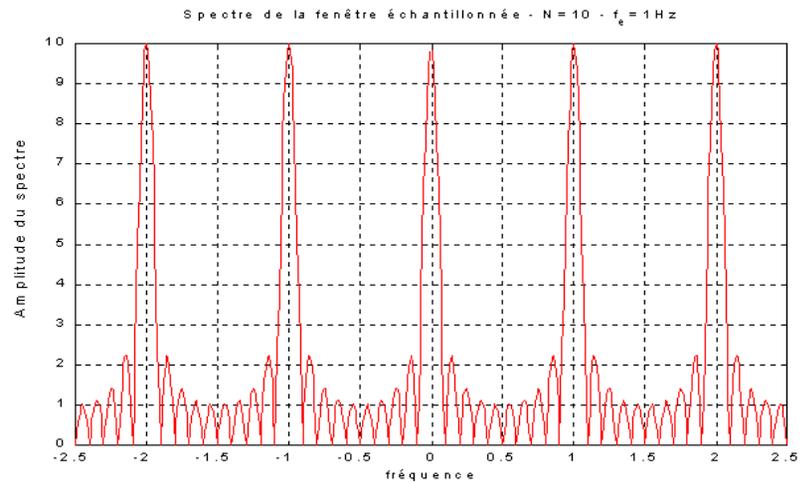
~ Convolution d'un signal X
par la fonction de transfert de la porte

Effets du fenêtrage sur un cosinus

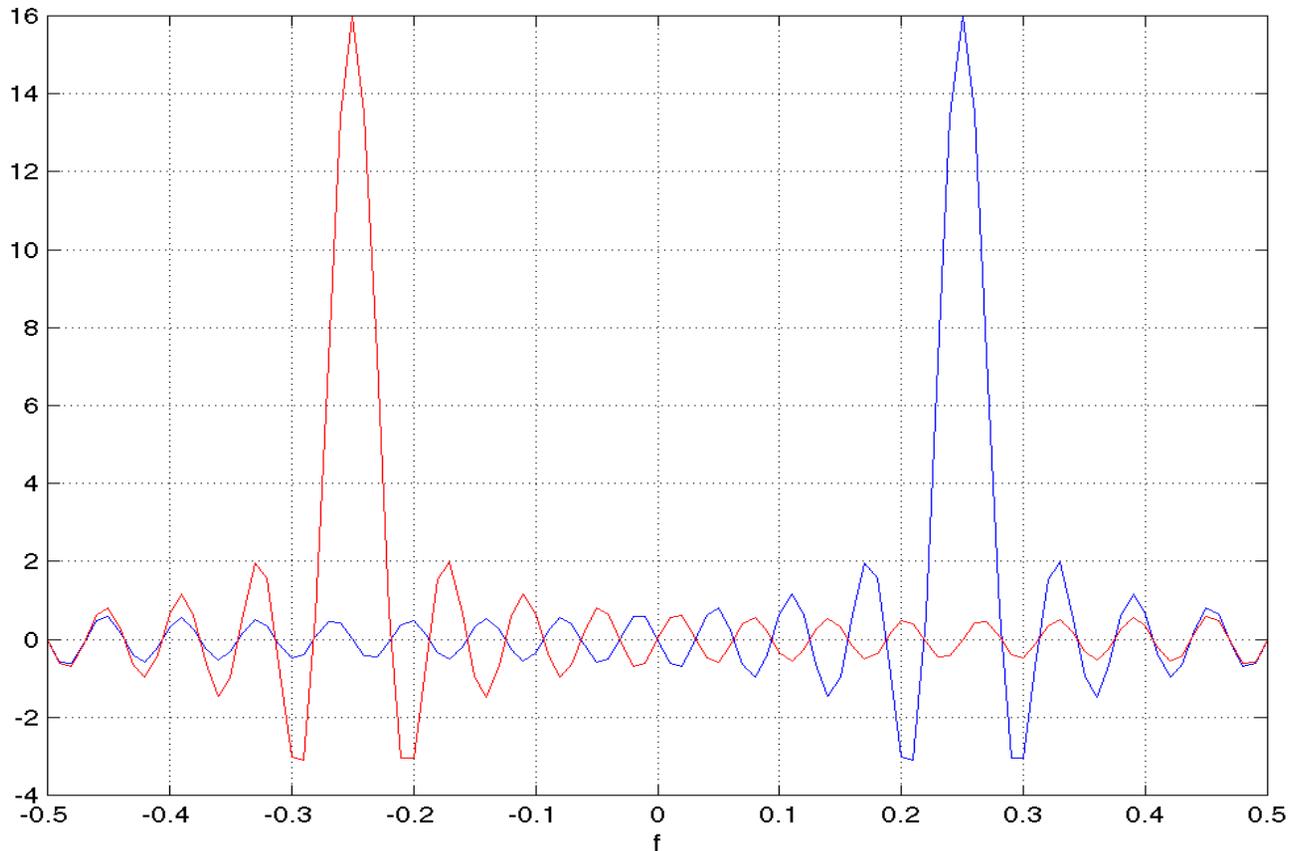
$X(v)$



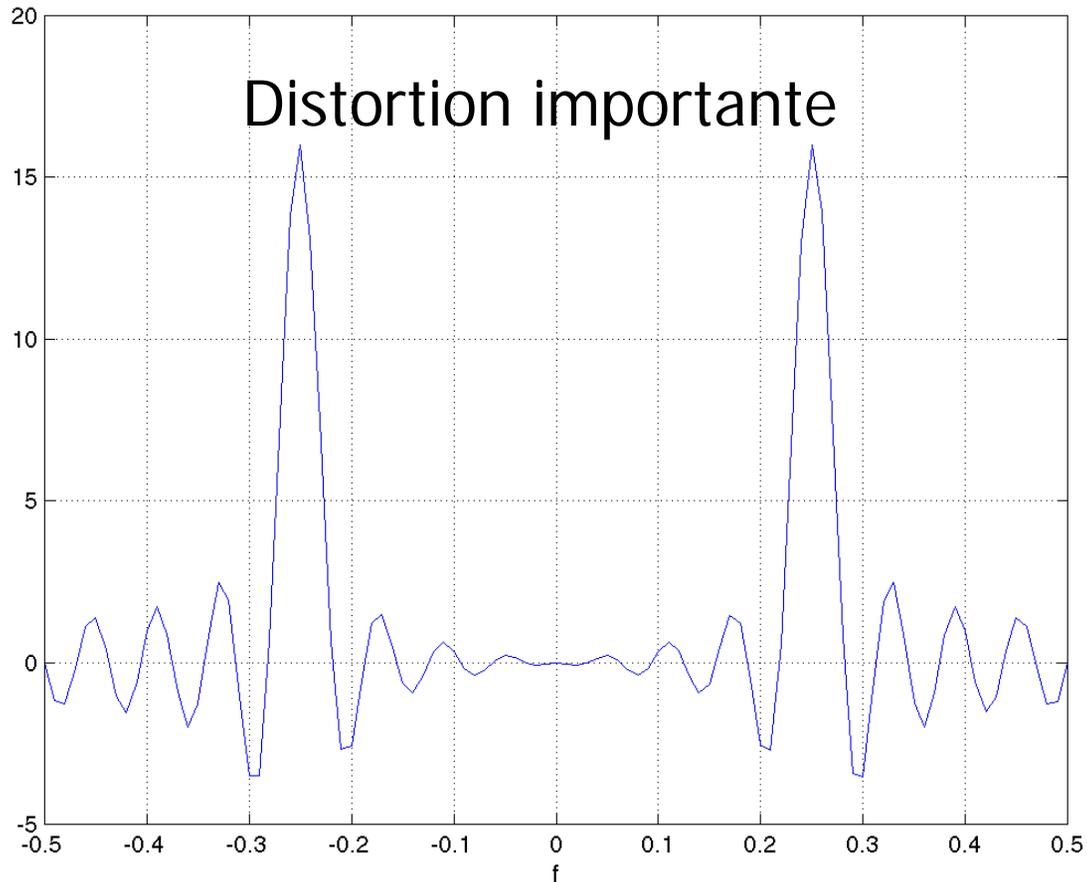
$H(v)$

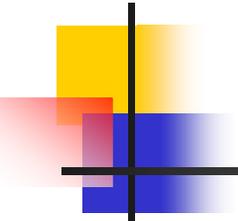


Effets du fenêtrage sur un cosinus



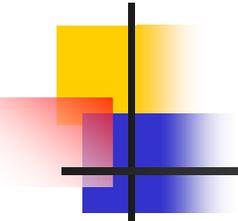
Effets du fenêtrage sur un cosinus





Distorsions apportées par la TFD

- On a donc, entre autre, l'apparition d 'oscillations parasites dues aux lobes du spectre de la fenêtre rectangulaire échantillonnée.
- On peut limiter ces oscillations parasites en utilisant une autre fenêtre c 'est-à-dire une autre fonction $h_f(n)$ dont les lobes spectraux sont d 'amplitudes plus faibles



Autres fenêtrages possibles

- On peut classiquement utiliser:
 - une fenêtre triangulaire,
 - une fenêtre de Hanning,
 - une fenêtre de Hamming,
 - une fenêtre de Kaiser,
 -

On calcule
 $x_1(n) = h_f(n)x(n)$

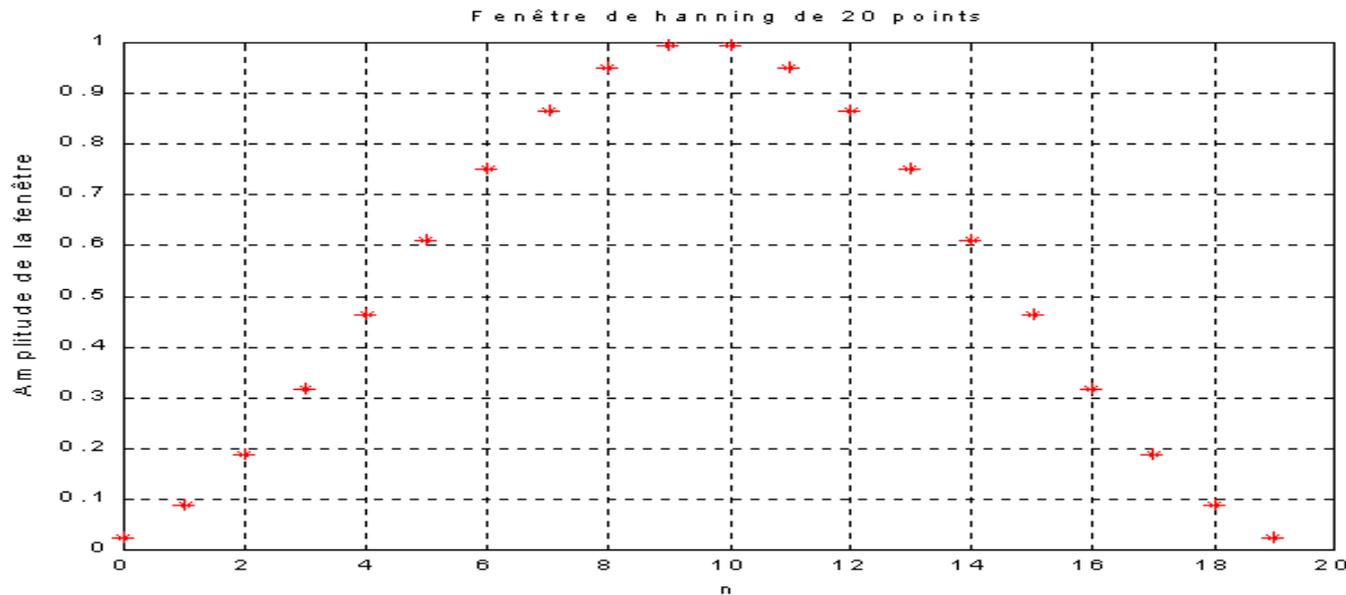


TFD sur $x_1(n)$

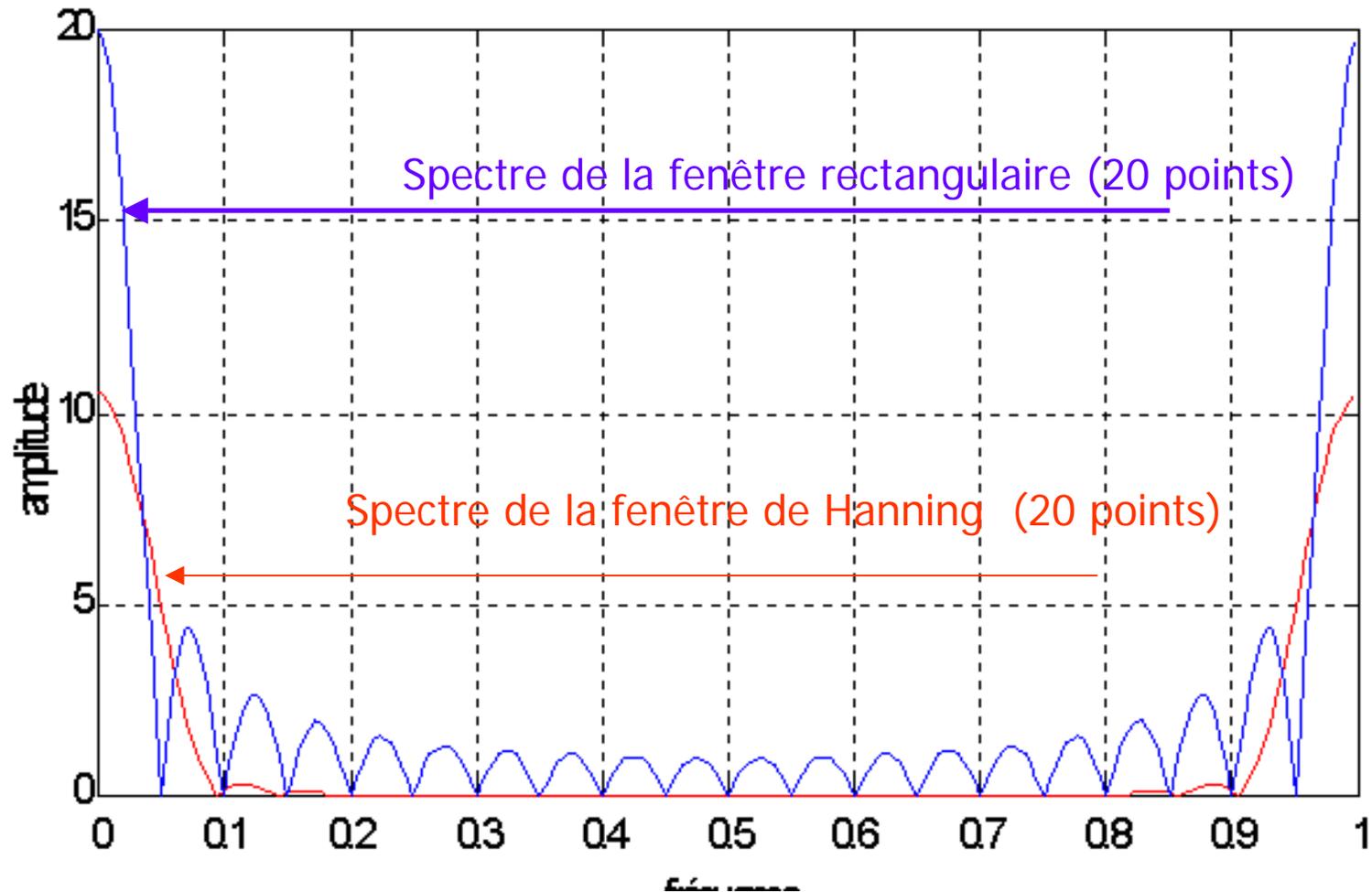
La fenêtre de Hanning

Fenêtre de Hanning

$$h(n) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{N} \left(n - \frac{N}{2}\right)\right)}{2}$$



Comparaison Hanning - fenêtre rectangulaire



Autres fenêtrages possibles

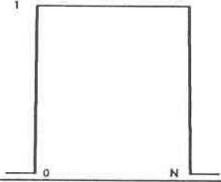
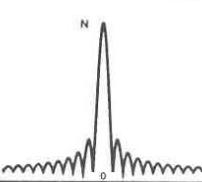
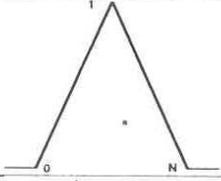
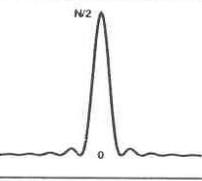
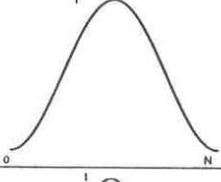
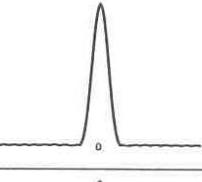
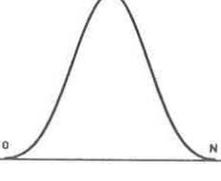
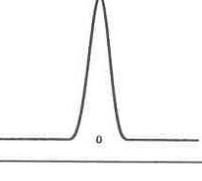
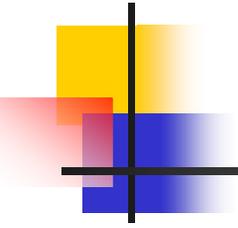
Nom	Equation $\forall n \in \{0 \dots N-1\}$	Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{\text{lob.princ}}{\text{lob.sec.}}$
Rectangulaire	$w[n] = 1$			$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire	$w[n] = 1 - \frac{ n - \frac{N-1}{2} }{\frac{N-1}{2}}$			$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming	$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$			$\frac{4}{N}$	\neq -41 dB
Blackman	$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$			$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques

nb d'oscillations ↘ (recherché) mais largeur du lobe princ. ↗

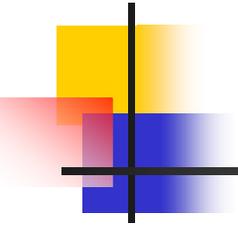


Exemple (1)

- Comment calculer un spectre de TFD avec fenêtrage ?
- On reprend notre exemple:

$$x(t) = \sin(2\pi t), N = 4 \text{ et } v_e = 4 \text{ Hz} + \text{Hanning}$$





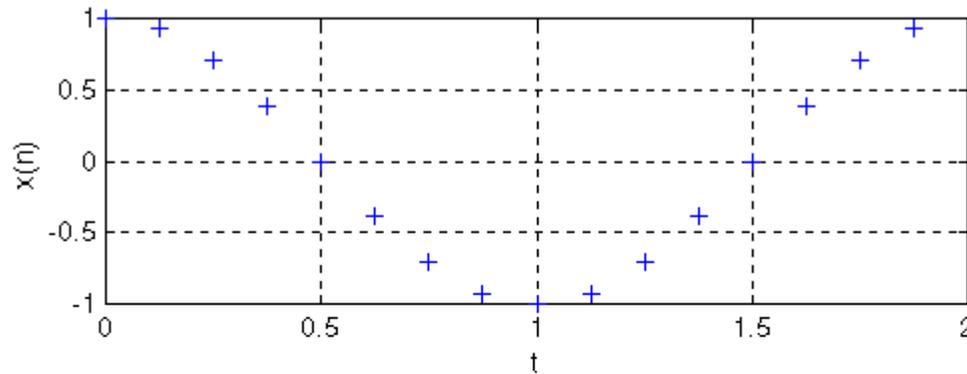
Exemple (2)

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
 - $f_0 = 0.5 \text{ Hz}$
 - $f_e = 8 \text{ Hz}$

- 3 analyses par TFD :
 - $N1 = 16;$
 - $N2 = 8;$
 - $N3 = 24;$

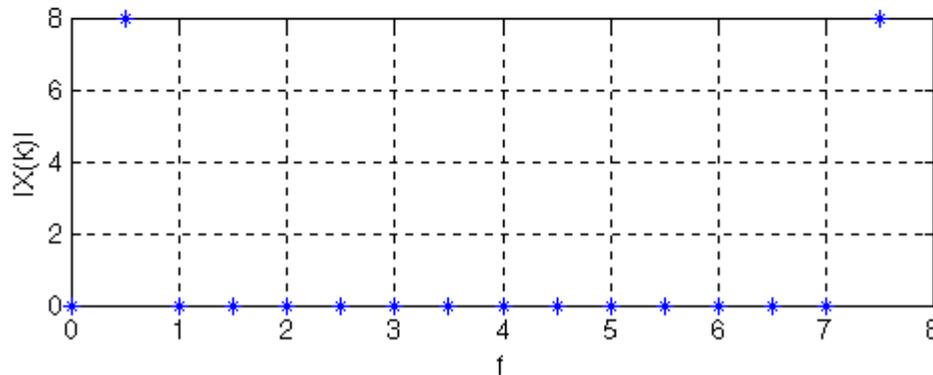
Exemple

- $N1 = 16$; $1/NTe = 0.5$ Hz;



Signal TFD idéal:

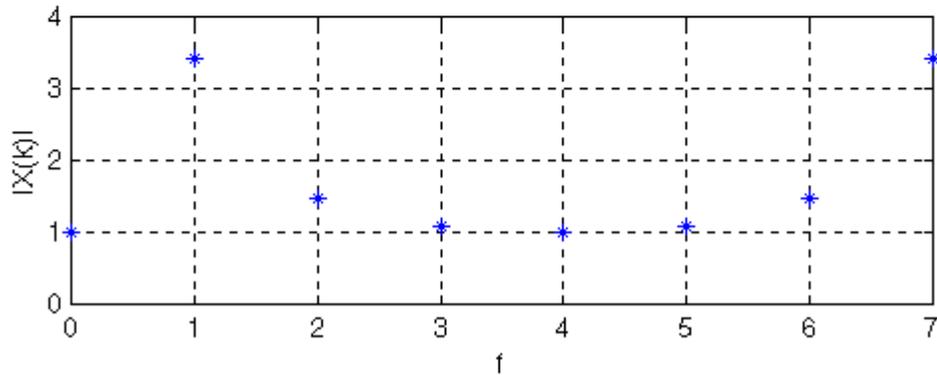
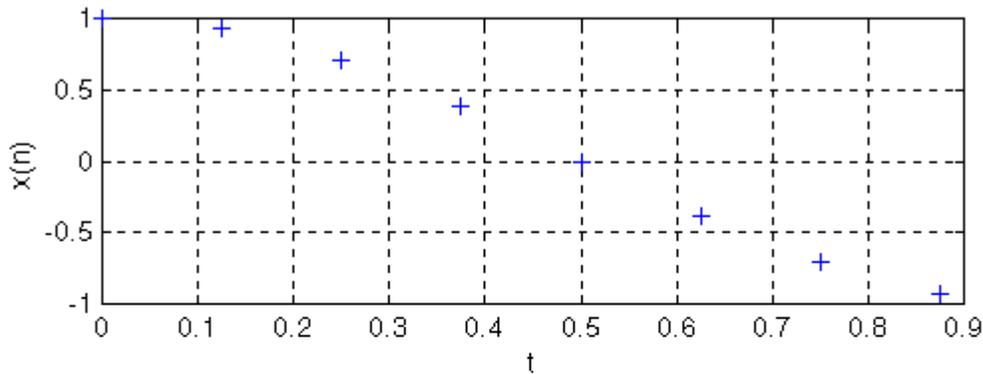
-On retrouve le spectre
Du signal continu



-Pas de raies parasites

Exemple

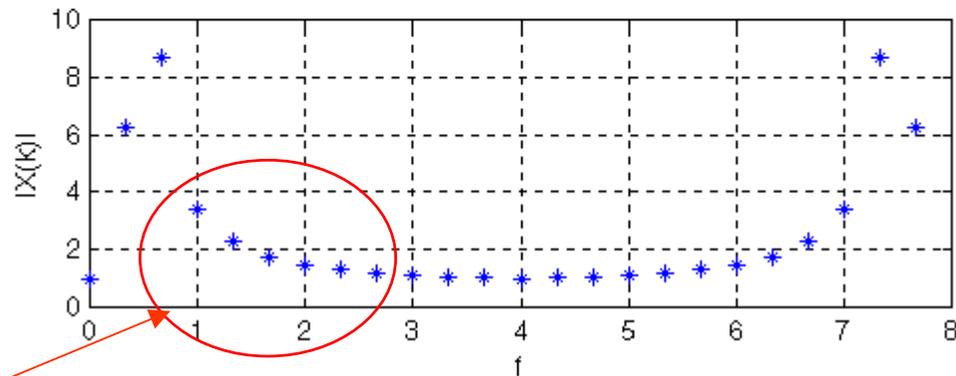
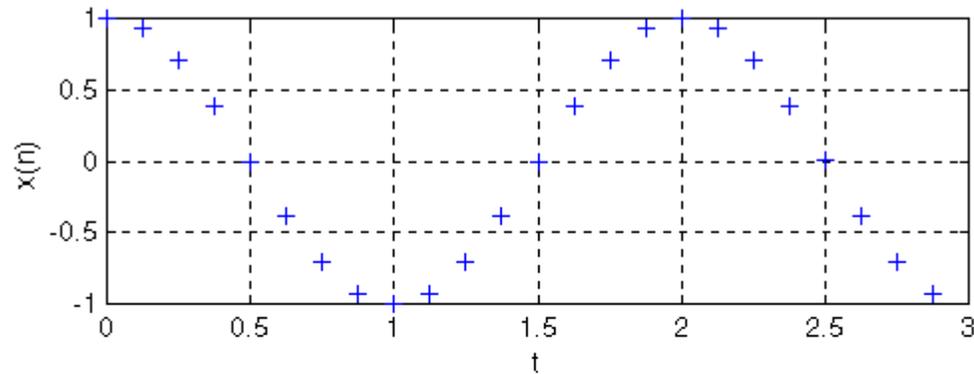
- $N1 = 8$; $1/N\text{Te} = 1$ Hz;



-Résolution fréquentielle trop faible

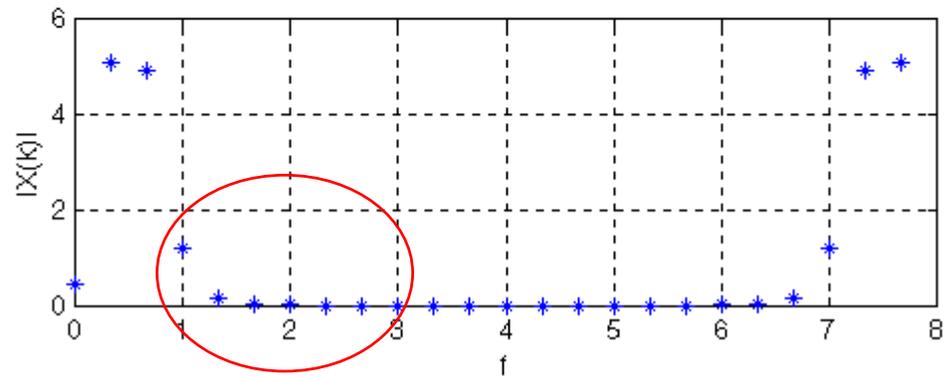
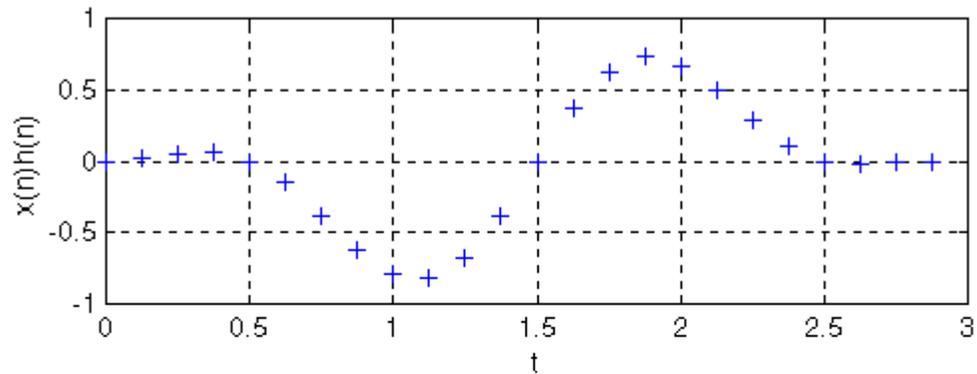
Exemple

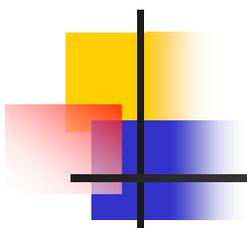
- $N1 = 24$; $1/NTe = 0.333... \text{ Hz}$;



Exemple

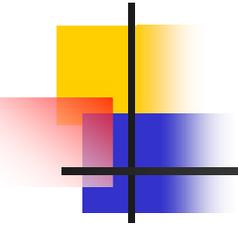
- $N1 = 24$ avec fenêtrage de Hanning





Calcul pratique d'une TFD

- TFD = multiplication matricielle
 - $X = T_N x$ avec $T_N = [e^{-2i\pi nk/N}]$
 - La TFD nécessite au moins N^2 multiplications
 - On cherche à réduire par un algorithme spécifique : la F.F.T. (Fast Fourier Transform)
 - Si $N = 2^m$, on a alors $N \log_2(N)$ opérations



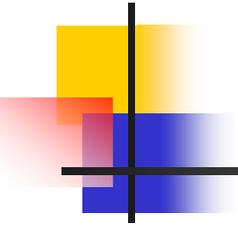
FFT(1/9) (hors programme)

- Algorithme de Cooley-Tuckey (1965) s'appuie sur paradigme classique: « diviser pour mieux régner »

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

Supposons que $N=2m$ soit une puissance de 2:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)}$$



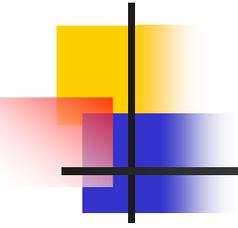
FFT(2/9)

■ Or

$$W_N^2 = e^{\left(\frac{-j2\pi}{N}\right) \times 2} = e^{\left(\frac{-j2\pi}{N/2}\right)} = W_{N/2}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x(2n)} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{x(2n+1)} W_{N/2}^{nk}$$

Le premier terme est la transformée de Fourier d'une séquence $y(n)=x(2n)$...Le second terme est la transformée de Fourier d'une séquence $z(n)=x(2n+1)$ de longueur $N/2$.



FFT(3/9)

- On obtient alors:

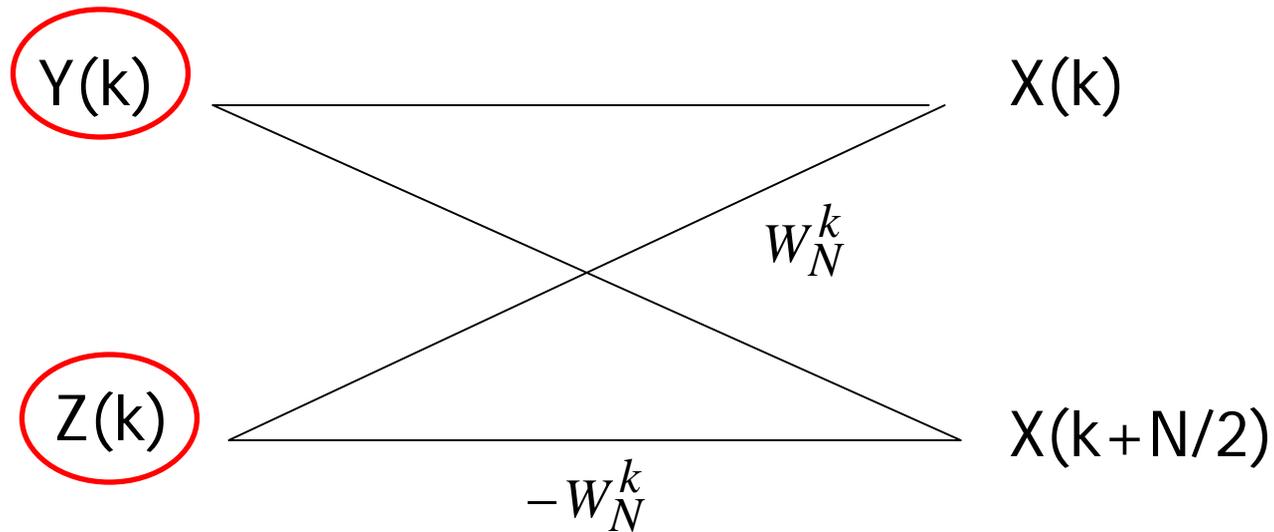
$$X(k) = Y(k) + W_N^k \cdot Z(k); \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Le calcul de $X(k)$ peut être décomposé en deux calculs de $N/2$ termes en remarquant que:

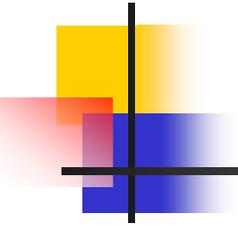
$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = Y(k) + W_N^k \cdot Z(k); \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + \frac{N}{2}) = Y(k) - W_N^k \cdot Z(k); \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{array} \right.$$

FFT (4/9)



N additions complexes et N/2 multiplications



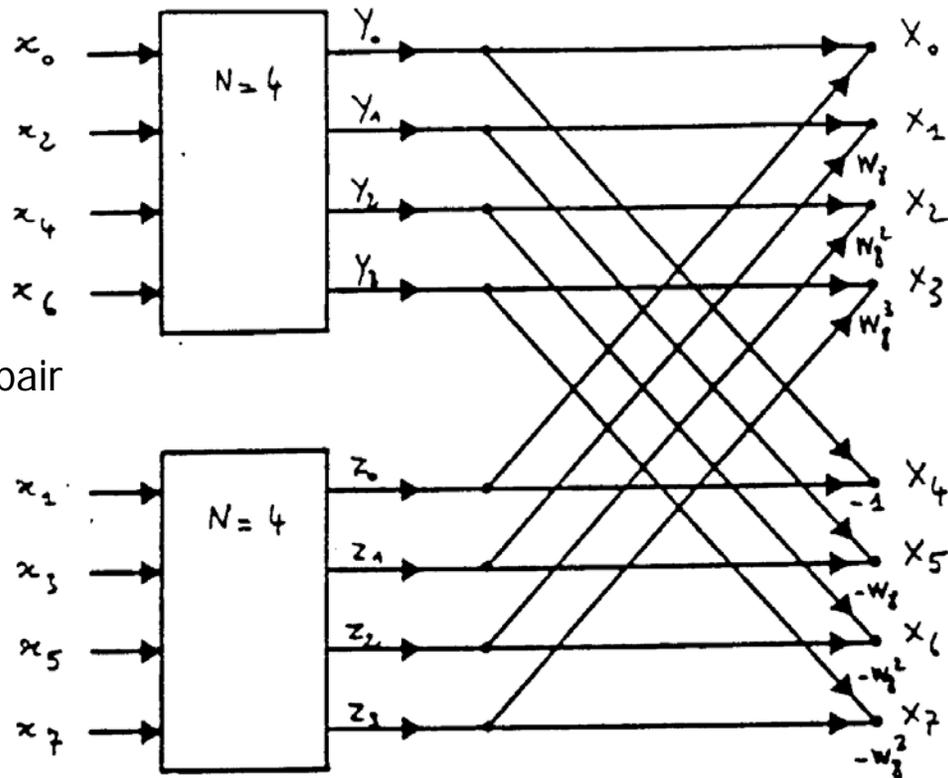
FFT (5/9)

- N étant de puissance 2, on peut itérer le procédé pour estimer les séquences $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(k) = U(k) + W_N^{2k} \cdot V(k); \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \\ Y(k + \frac{N}{4}) = U(k) - W_N^{2k} \cdot V(k); \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \end{array} \right.$$

FFT (6/9)

- Entrelacement pour $N=8$, 1ère étape

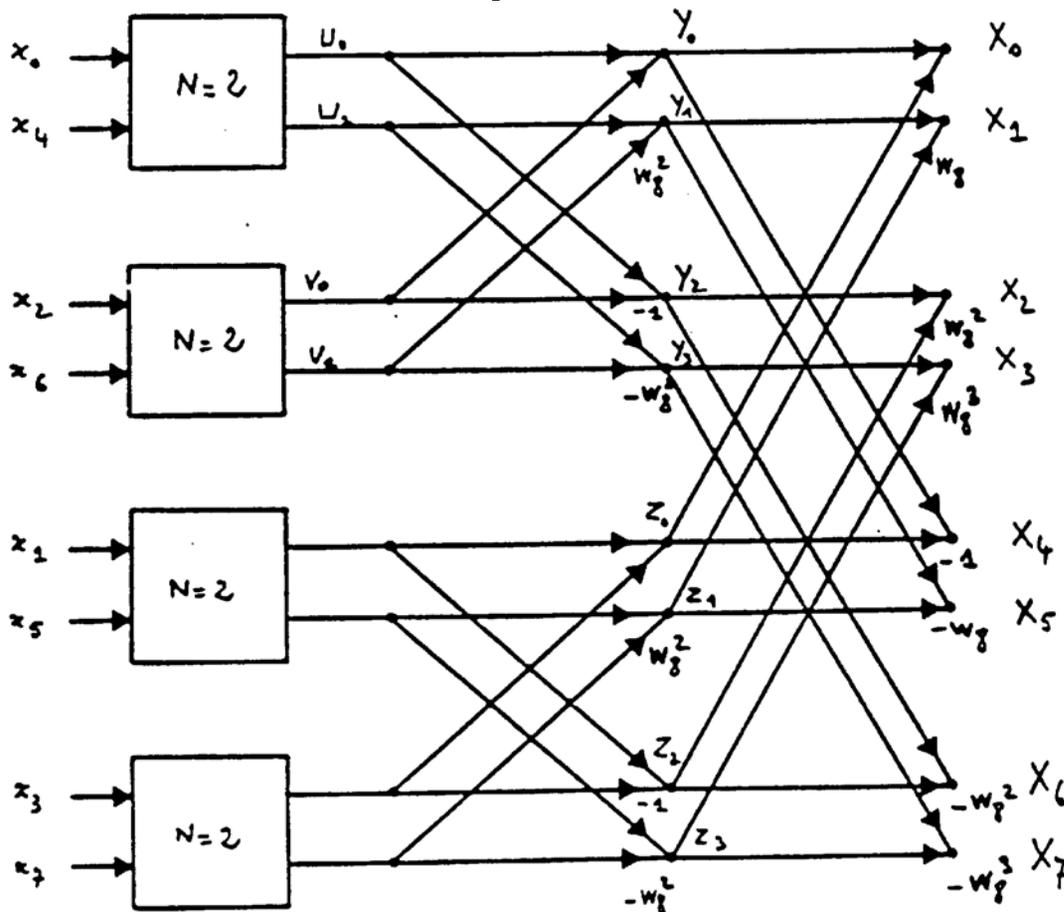


Séparation: pair/impair

Premier entrelacement:
Introduction $Y(k)$ $Z(k)$

FFT(7/9)

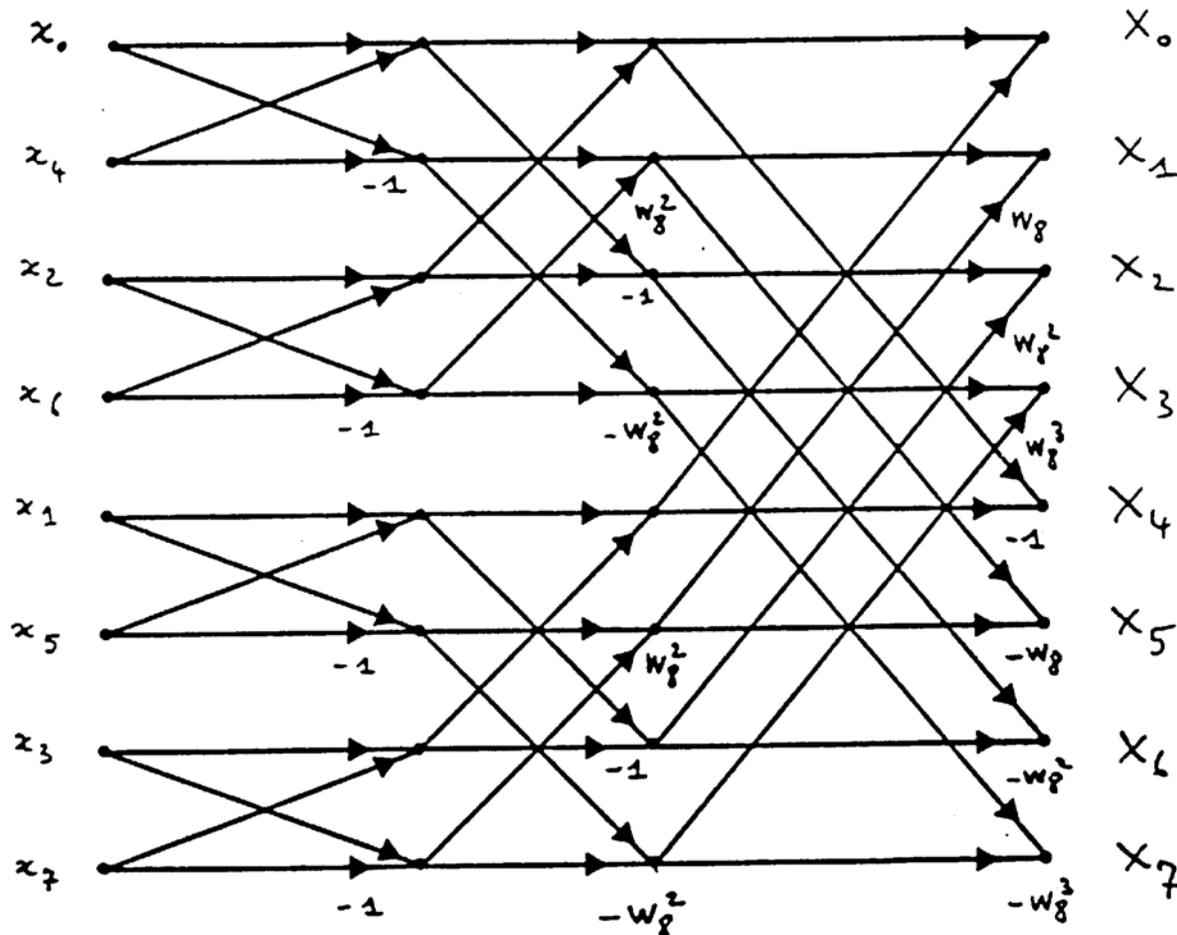
■ Entrelacement pour $N=8$, 2ème étape

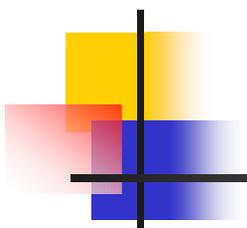


Itération de l'entrelacement sur $y(k)$ et $z(k)$

FFT(8/9)

- Transformée de Fourier rapide N=8 :

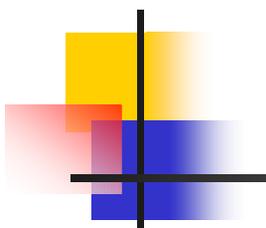




FFT(9/9)

■ Bilan $N=8$

- TFD standard [$N*N-1$ additions et N^2 multiplications]
 - 56 additions et 64 multiplications (complexes)
- FFT [$N\log_2 N$ additions et $\sim (N/2)\log_2 N$ multiplications]
 - 24 additions et 17 multiplications (complexes)



Bilan

1. Rappels concepts de base ✓ (10%)
 2. Transformée de Fourier discrète ✓ (40%)
-
3. Filtrage numérique