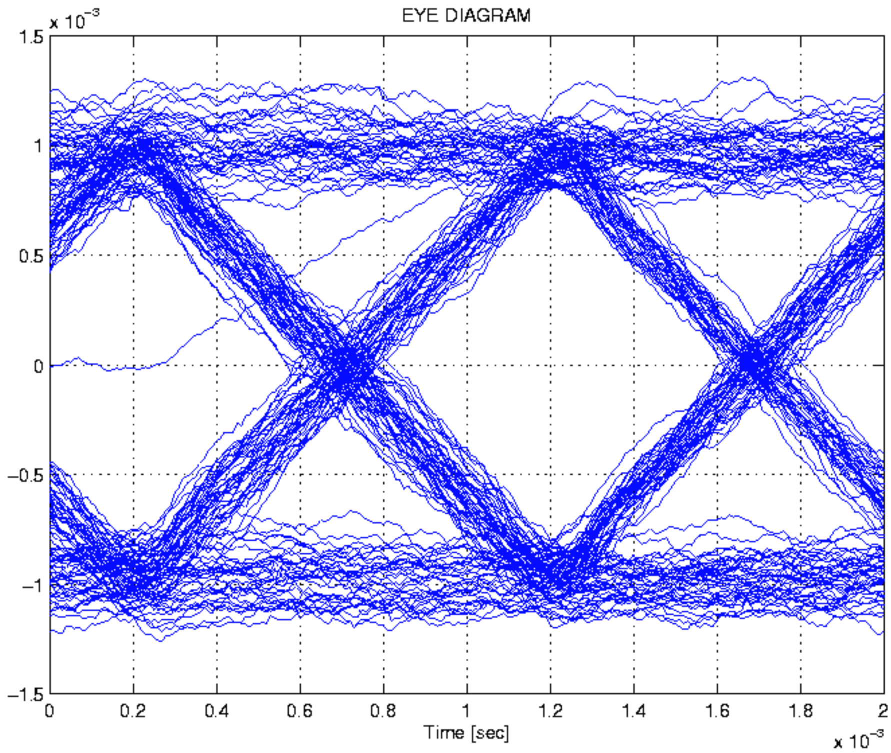
Transmission de l'information

Recueil d'exercices

ISEN4



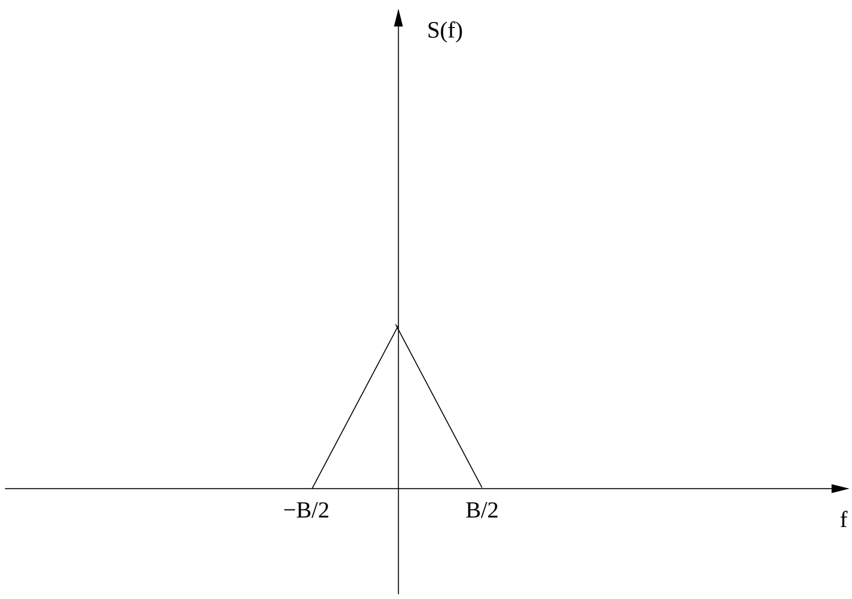
Intervenants : D. Boulinguez
C. Krzeminski
J. Palos

Rappels sur la numérisation

1 Echantillonnage

On suppose que le signal $s(t)$ est connu sur une durée T. On appelle B la bande spectrale occupée par $s(t)$ (NB : le spectre de $s(t)$ est centrée sur la fréquence nulle).

1. On échantillone $s(t)$ à la fréquence $\frac{1}{T_e}$. Sachant qu'il y a N échantillons sur la durée T ($T = NT_e$), quelle relation doit-on avoir entre N, B, et T pour ne pas perdre d'information sur ce signal ? Dans la cas contraire, quel inconvénient présente le spectre du signal ?
2. Supposons maintenant que la transformée de Fourier de $s(t)$ est :



Représenter l'allure du spectre de $s(t)$ échantillonné noté $s_e(t)$

2 Echantillonnage des signaux passe-bande

1. Le signal analogique $x_a(t)$, défini comme ayant un spectre triangulaire de fréquence maximale $F = 5kHz$, module en amplitude une porteuse sinusoïdale de fréquence $\nu_0 = 110kHz$. Le signal modulé est donc $x_m(t) = x_a(t) \times cos(2\pi\nu_0 t)$.
   On désire transmettre le signal modulé en amplitude en échantillonnant et en transmettant les échantillons sous forme numérique. En appliquant le théorème de Shannon, trouver le nombre minimal d'échantillons à transmettre par seconde.

2. On échantillonne en fait le signal modulé en amplitude à la fréquence $\nu_e = 40kHz$.
   (a) Dessiner l'allure du spectre du signal échantillonné parfait.
   (b) Qu'obtient-on en filtrant ce signal échantillonné parfait avec un filtre dont la bande passante s'étend de 105 à $115kHz$?
   (c) Qu'obtiendrait-on en filtrant le signal échantillonné parfait avec un filtre passe-bande idéal de fréquences de coupure $\nu_0 \pm 20kHz$?

(d) Conclure sur l'intérêt de cette méthode. Discuter des problèmes liés aux imperfections de l'échantillonnage et à la stabilité des fréquences.

3. On cherche dans cette question à généraliser les résultats de la question précédente. Le signal à échantillonner a une bande passante limitée entre $\nu_0 - F$ et $\nu_0 + F$ (avec bien sûr les fréquences négatives symétriques). La fréquence d'échantillonnage sera appelée ν_e.
   (a) En écrivant qu'après échantillonnage, les multiples bandes de fréquence issues du repliement ne se chevauchent pas, trouver deux inégalités que doivent satisfaire les fréquences ν_0, F, et ν_e. Ces inégalités font intervenir un nombre entier k.
   (b) En déduire :
   - la valeur maximale de k en fonction de F et ν_0,
   - la valeur minimale pour ν_e,
   - une forme généralisée du théorème de Shannon.
4. En reprenant les valeurs numériques de la première question, chercher la valeur de k maximale. Déterminer alors la bande de fréquence possible pour ν_e.

3 Quantification

1. Un signal $s(t)$ est quantifié sur une plage $(+V, -V)$, à l'aide de n digits. Donner l'expression du pas de quantification q en fonction de V et de n dans la cas d'une quantification uniforme.
2. Soit une image carrée de 6 cm de côté. On désire la numériser avec un pas d'échantillonnage de $5 \mu m$ et un convertisseur à 12 bits. Le stockage de l'image doit se faire sur des bandes magnétiques pouvant contenir 320 millions de bits. Quelles conclusions peut-on faire sur cette numérisation ? Proposer une numérisation qui soit mieux adaptée.

Caractéristiques des transmissions numériques

1 Débit binaire

1. Quel est le débit binaire d'une voie de transmission émettant un signal binaire à chaque instant d'horloge de période T_b ? Application numérique : $T_b = 10ms$.
2. On désire transmettre un signal M-aire où chaque mot de n bits est codé par un signal de durée T. Quelle est la rapidité de modulation R disponible ? Application numérique : $T = 100ms$.
3. Exprimer le débit binaire D disponible dans ce cas. Application numérique $n = 4$.

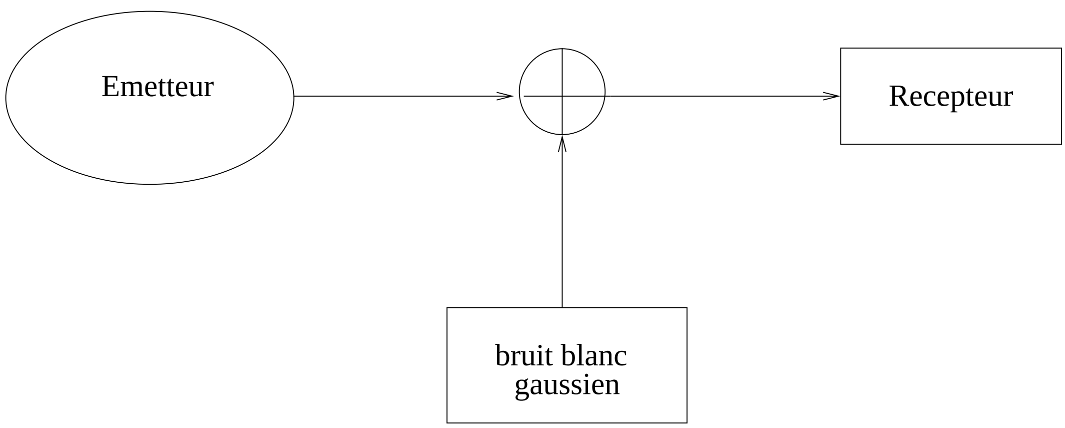
2 Débit binaire - Rapidité de modulation

1. Quelle est la rapidité de modulation nécessaire pour que le canal de transmission ait un débit binaire de 2400 bit/s, sachant que les signaux transmis sont binaires.
2. On suppose que le canal est à bruit blanc additif gaussien. Quelle doit être la valeur du rapport signal sur bruit, si la bande passante de la liaison est de $1kHz$, pour pouvoir obtenir le débit binaire précédent.
3. Reprendre les questions dans le cas où le signal est quadrivalent.

3 Transmission et probabilité d'erreur

Une chaîne d'émission/réception numérique fonctionne de la manière suivante :
– si le bit est 1, on envoie $+5V$.
– si le bit est 0, on envoir $-5V$.

Le récepteur reçoit ce signal auquel vient se superposer un bruit blanc gaussien de moyenne $m = 1V$ et d'écart-type $\sigma = 2V$.



Grâce à un dispositif de synchronisation non décrit, le récepteur échantillonne chaque bit en son milieu.

- si cet échantillon possède un niveau supérieur à $0V$, le récepteur décide qu'il a reçu un "1".
- s'il possède un niveau inférieur à $0V$, alors le récepteur décide qu'il a reçu un "0".

1. Sachant que les deux bits sont équiprobables sur la durée de la transmission, quelle est la probabilité d'erreur sur un bit ?
2. Caculer le nombre de bits transmis en moyenne sans erreur pour un bit faux.

4 Capacité

Soit un support de transmission caractérisé par ses fréquences extrêmes : 60 kHz et 108 kHz et un rapport signal à bruit de 37 dB.

1. Quelle est la capacité théorique pouvant être obtenue sur ce suppport ?
2. Même question si le rapport signal à bruit passe à 40 dB.
3. Comparer les résultats précédents.

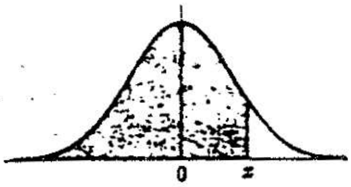
5 Ligne téléphonique

Soit une ligne téléphonique dont les fréquences extrèmes de la bande passante sont 300 Hz et 3400 Hz. La rapidité de modulation est 1200 bauds et les signaux transmis sont de valence 16.

1. (a) Quel est le débit binaire disponible sur cette ligne ?
   (b) On suppose que la ligne présente un rapport signal sur bruit de 34dB. Quelle est la capacité théorique de cette ligne ?
2. (a) Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimale si l'on veut numériser un signal analogique dont la bande passante est identique à celle du support de transmission ?
   (b) Si l'on arrondit la valeur de la fréquence maximale du signal à 4kHz, que devient cette fréquence d'échantillonnage ?
   (c) Quel temps sépare deux échantillons consécutifs du signal ?

AIRE SOUTENDUE PAR LA COURBE
NORMALE CANONIQUE DE $-\infty$ à x

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Codes en ligne

1 Codage

- Soit la suite de bits :

  $$1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

  Représenter les signaux transmis en code bipolaire simple, en code HDB1, puis HDB2.

- Coder la séquence binaire suivante à l'aide du code HDB2 puis à l'aide du code HDB3

  $$1000111000010111 0000$$

- Recommencer la même opération avec la séquence binaire suivante :

  $$0000111000000111 1000$$

- décoder les séquences suivantes en supposant qu'elles ont été codées en HDB3 :

  séquence 1 :

  $$-100-10+1-1+1000+1-100-1000+1-1000+1$$

  séquence 2 :

  $$000+1000+1000-1000-1+1000-1+1000+1-1+1$$

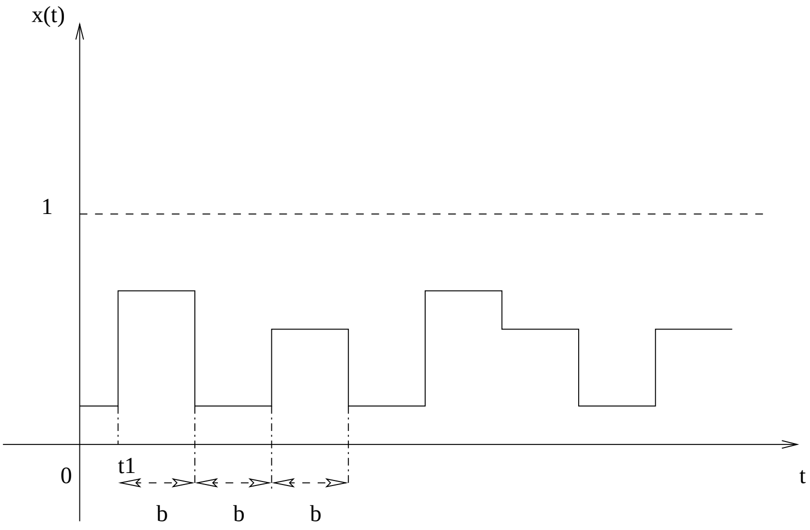
- décoder les séquences suivantes en HDB2 :

  séquence 1 :

  $$0000000000000010001110 10001$$

  séquence 2 :

  $$1100011000111000100010 00000$$



2 DSP d'un code NRZ

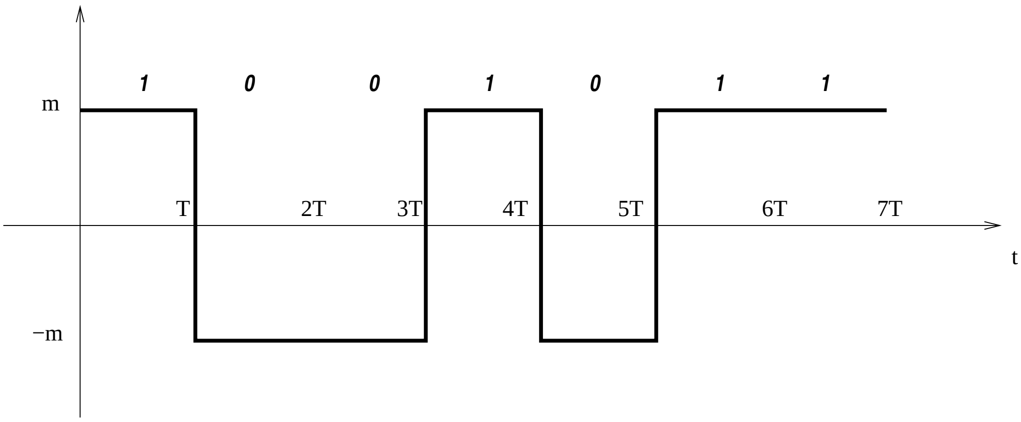
1. Un signal $x(t)$ de moyenne $\frac{1}{2}$ est tel que son amplitude change toutes les b secondes. L'amplitude dans un intervalle est indépendante de l'amplitude dans l'intervalle précédent. Le premier instant de changement est uniformément réparti dans un intervalle d'amplitude b. Trouver la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance.
   Faire l'application au cas du code NRZ.

Transmission en bande de base

1 Probabilité d'erreur

Pour transmettre des éléments binaires a_k équiprobables, on utilise le codage suivant :

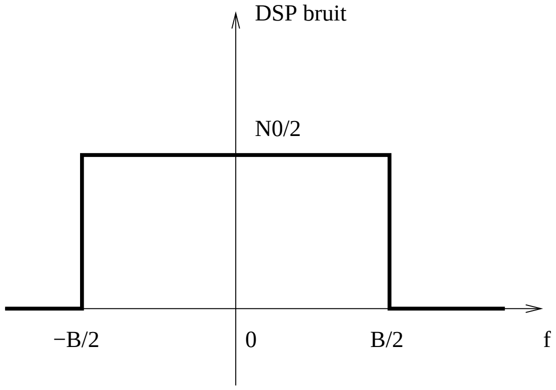
- $a_k = 1$, on émet $s_1(t)$ de durée T et de valeur constante m ($m > 0$)
- $a_k = 0$, on émet un signal $s_0(t)$ de durée T et de valeur constante $-m$.



Les signaux $s_i(t)$ ($i = 0, 1$) sont transmis par l'intermédiaire d'un câble et le signal reçu $x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = \alpha . s_i(t) + b(t)$$

où α est une atténuation constante positive non aléatoire et $b(t)$ un bruit centré stationnaire gaussien de densité spectrale de puissance $\gamma_b(f)$:



Pour décider du signal émis durant l'intervalle $[kT, (k+1)T]$, on prend n échantillons de $x(t)$ durant cet intervalle de temps.

1. Quelle doit être la fréquence maximale d'échantillonnage de $x(t)$ pour que les échantillons soit décorrélés ?

2. On suppose que l'observation de x est constituées de n échantillons non corrélés.

$$\vec{x} = \begin{vmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \dots \\ x(t_n) \end{vmatrix}$$

La règle de décision est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{2\alpha m}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x(k) & \overset{\delta_1}{>} & 0 \\ \dfrac{2\alpha m}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x(k) & \overset{<}{\delta_0} & 0 \end{array}$$

Elle compare donc une quantité test Q à un seuil noté S. Définir dans ce cas la probabilité d'erreur en fonction de Q et de S.

3. Calculer l'expression de la probabilité d'erreur en fonction de la densité spectrale du bruit, de l'énergie E des signaux émis et de l'atténuation α.
Exprimer cette probabilité d'erreur en introduisant la fonction d'erreur.
4. On suppose désormais que α est aléatoire de loi $p(\alpha)$ indépendante du signal émis $s_i(t)$. Les calculs précédents restent-ils valables ? Expliquer.

2 Récepteur optimal

Pour transmettre une suite d'éléments binaires indépendants, prenant les valeurs 0 ou 1 avec la même probabilité, on utilise un alphabet de deux signaux $h_0(t)$ et $h_1(t)$ de durée T, définis sur l'intervalle $[0, T[$. Sur l'intervalle $[kT, (k+1)T[$, on émet $h_0(t - kT)$ ou $h_1(t - kT)$ selon la valeur de l'élément binaire à transmettre.

On s'intéressera à l'intervalle de temps $[0, T[$ et cet exercice constitue une généralisation de ce qui a été vu en cours (partie II). On supposera donc que le récepteur est formé par un filtre de fonction de transfert $G(f)$ suivi d'un comparateur à seuil et d'un échantillonneur à l'instant t_0.

Sur l'intervalle $[0, T[$, le signal $x(t)$ à l'entrée du récepteur est égal à :

$$x(t) = h_0(t) + B(t) \quad \text{ou} \quad x(t) = h_1(t) + B(t)$$

où $B(t)$ représente un bruit blanc gaussien centré, indépendant du signal et de densité spectrale de puissance bilatérale $N_0/2$.

1. Représenter la chaîne de réception.
2. Calculer la valeur du signal à l'instant d'échantillonnage, en l'absence de bruit, respectivement lorsque l'élément binaire 0 ou 1 a été transmis. On appellera u_0 et u_1 ces deux valeurs, que l'on exprimera sous forme d'intégrales faisant intervenir $G(f)$, et repectivement $H_0(f)$ et $H_1(f)$.
3. Calculer la probabilité d'erreur et montrer qu'elle ne dépend que du rapport $\rho = \frac{(u_0 - u_1)}{\sigma}$; σ^2, que l'on cherchera à exprimer en fonction de N_0 et de $G(f)$, est la variance du bruit en sortie de l'échantillonneur.
4. Sous quelle condition sur ρ, le récepteur sera-t-il optimal ?
5. L'inégalité de Schwarz nous permet d'en déduire que pour obtenir le récepteur optimal, le filtre de réponse $g(t)$ doit être adapté au signal, c'est-à-dire :

$$g(t) = k[h_1(t_0 - t) - h_0(t_0 - t)]$$

où k est une constante.

Montrer alors que la probabilité d'erreur se met sous la forme :

$$P_{eb} = \frac{1}{2} erfc \sqrt{\frac{\Delta^2}{4N_0}}$$

où

$$\Delta^2 = \int_0^T (h_1(t) - h_0(t))^2 dt$$

Que représente physiquement Δ^2 ? Retrouver en utilisant ce résultat la probabilité d'erreur pour le code NRZ et le code RZ.

3 Interférence entre symboles

On considère un système de transmission cpmportant :

- une source qui délivre le signal $\sum a_m \delta(t - mT)$ où les a_m sont des éléments binaires mutuellement indépendants et prenant les valeurs $\pm A$ avec la même probabilité, et $\delta(t)$ représente la distribution de Dirac.
- une chaîne de transmission constituée d'un filtre d'émission, de fonction de transfert $E(f)$, d'un milieu de transmission supposé non sélectif (fonction de transfert égale à 1), et d'un filtre de réception de fonction de transfert $R(f)$.
- un échantillonneur et un comparateur à seuil situés en bout de chaîne.

Un bruit blanc gaussien centré indépendant du signal, de densité spectrale de puissance bilatérale $N_0/2$, s'ajoute au signal à l'entrée du filtre de réception.

On suppose que $E(f)$ et $R(f)$ sont égaux à $H(f)$, défini ainsi :

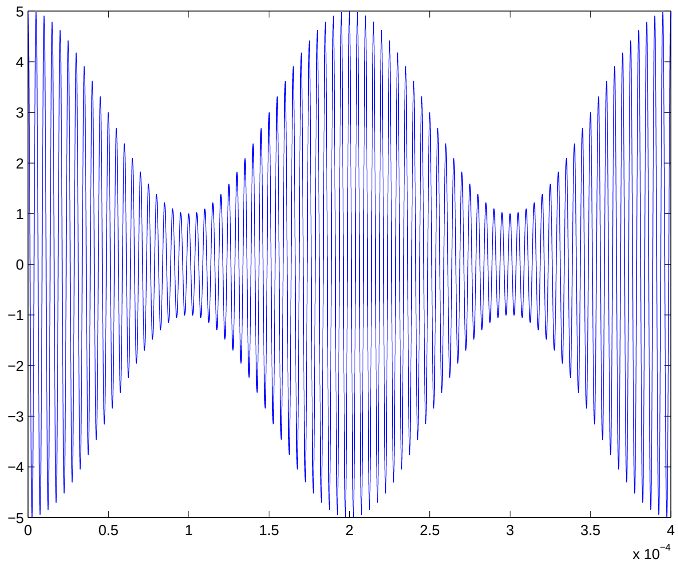
$$H(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & si \quad |f| < \frac{1}{4T} \\ -\sqrt{T} & si \quad \frac{1}{4T} < |f| < \frac{1}{2T} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de trasnfert globale de la chaîne de transmission. Que remarque-t-on ?
2. Exprimer la probabilité d'erreur P_{eb} sue les éléments binaires en fonction de la puissance moyenne émise P_m, de N_0 et du débit D.

Modulation d'Amplitude

1 Analyse d'un signal modulé en amplitude

Un oscilloscope permet de donner une représentation temporelle d'un signal électrique. Un signal AM est capté par un récepteur. Sa fréquence de porteuse est de 200 kHz, sa fréquence modulante est de 5 kHz et sa puissance d'émission est de 100 kW. Le signal reçu est envoyé sur un oscilloscope, l'amplitude est en Volt :



1 - Quelles sont les fréquences contenues dans le signal modulé ?

2 - Quelle est la bande de fréquence du signal modulé ?

3 - Quel est le taux de modulation ?

4 - Calculer la répartition de la puissance contenue dans la porteuse et dans chacune des bandes latérales.

2 Démodulateur à diode

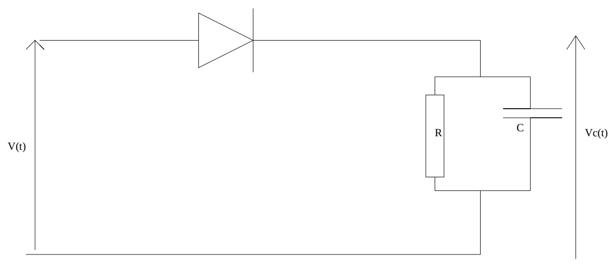
Le détecteur d'enveloppe décrit par la figure suivante est utilisé afin de retrouver le signal m(t) à partir du signal AM :

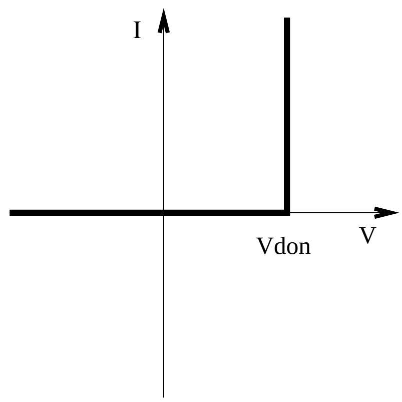
$$v(t) = [1 + m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \tag{1}$$

où m(t) est un signal carré prenant les valeurs 0 et -0.5 V et ayant un période T» $1/f_c$. Dessiner le signal démodulé dans les cas où RC=T/20 et 4T.

Ouelques indications :

On prendra comme hypothèse que la tension V_{don} (tension de seuil de la diode) est nulle. Distinguer les deux régimes de fonctionnement du circuit en fonction de la tension aux bornes





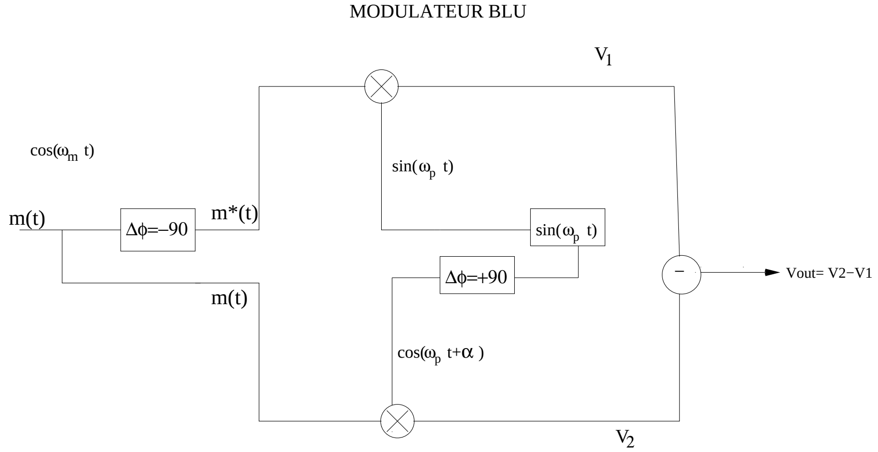
de la diode, et exprimer la tension aux bornes du condensateur dans les deux cas. Enfin dans le cas où la diode est bloquée calculer le temps qu'il faut pour que la tension aux bornes du condensateur atteigne l'enveloppe du signal dans le cas où $RC = T/20$ et $RC = 4T$. Conclure dans les deux cas en dessinant l'allure du signal démodulé.

3 Modulateur BLU

Dans le modulateur BLU, un déphasage entraîne que le déphasage initial diffère de 90 degrés d'un petit angle α. Calculer le signal en sortie du modulateur et montrer que le signal en sortie ne correspond plus à un signal modulé en bande latérale unique en supposant que l'entrée est $\cos(\omega_m t)$.

Quelques indications :

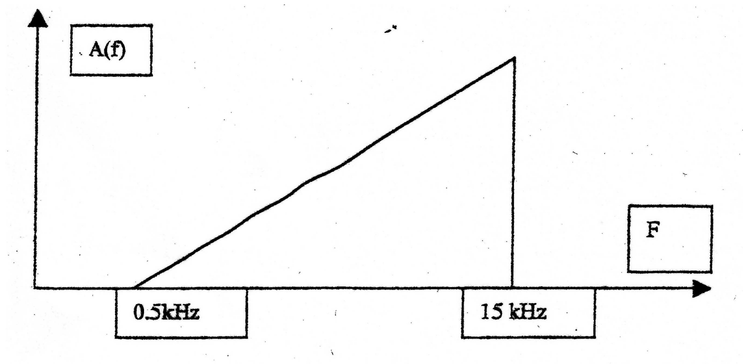
Comprendre d'abord le fonctionnement du modulateur en posant α nul, montrer que l'on a



alors un signal BLU en sortie. Exprimer ensuite dans le cas où est non nul la différence entre les deux tensions, puis faire un développement limité au premier ordre en α afin d'obtenir deux termes correspondant à deux signaux de fréquence différente. Interpréter ensuite.

4 Modulation cohérente

On considère le signal audio a(t) dont on donne le spectre :



On lui fait subir une modulation d'amplitude double bande sans porteuse, à l'aide de la porteuse $P(t) = A\cos(2\pi F_p t)$ avec F_p=16,5kHz

1-Donner l'expression du signal modulé s(t).

2-Représenter le spectre du signal modulé.

3-Que doit-on faire pour obtenir une BLU, cette opération vous semble t-elle facile ?

4-Comment retrouver le signal d'origine a(t), à partir du signal modulé ? Comment s'appelle cette démodulation et qu'elle en est la principale difficulté ?

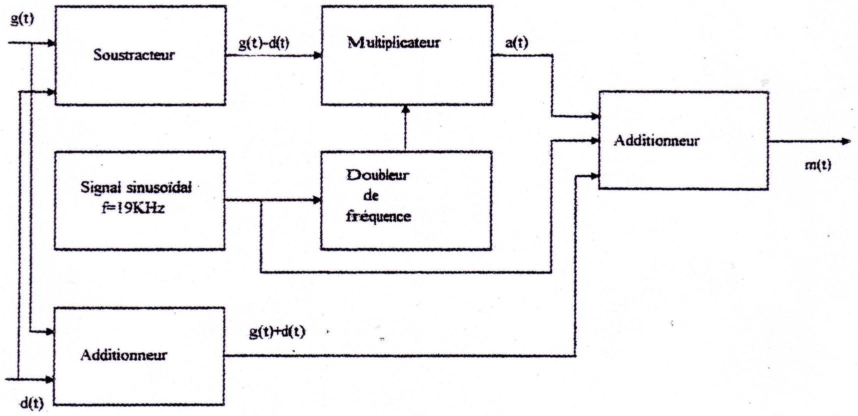
5 Codage stéréophonique

On se propose d'étudier le système permettant de générer un « signal composite» permettant la transmission d'émissions stéréophoniques sur la bande radio FM. En effet dans ce cas l'émetteur doit transmettre simultanément les signaux audio voix gauche et voix droite.

Les signaux réellement transmis sont :

- signal gauche PLUS signal DROIT
- signal gauche MOINS signal DROIT

Le schéma du "codeur stéréophonique" est le suivant :



– g(t) : signal voix gauche
– d(t) : signal voix droite

On considérera que les signaux (g(t) + d(t)) et (g(t) - d(t)) occupent chacun la bande de fréquence 0-15kHz et pour représentation symbolique de leur spectre :

a)Représentez le spectre du signal a(t) en sortie du multiplicateur. Donnez l'expression de a(t).

b)En déduire alors le spectre du signal m(t). Donner l'expression de m(t).

c)Pourquoi a-t-on choisi ce type de signal pour la transmission stéréophonique ?

d) Quelle opération devra-t-on effectuer à la réception pour récupérer le signal g(t)-d(t) ? Expliquez.

e) Proposez un schéma bloc du décodeur stéréophonique utilisé à la réception pour reconstituer les signaux g(t) et d(t).

Modulation de Fréquence

1 Modulation de fréquence

On considère un signal sinusoïdal : $e(t) = E \cdot \cos(2\pi F_e t)$ avec F_e=5kHz. On effectue une modulation de fréquence sur ce signal avec une porteuse F_p=1 MHz. On précise que l'excursion en fréquence est égale à 5kHz.

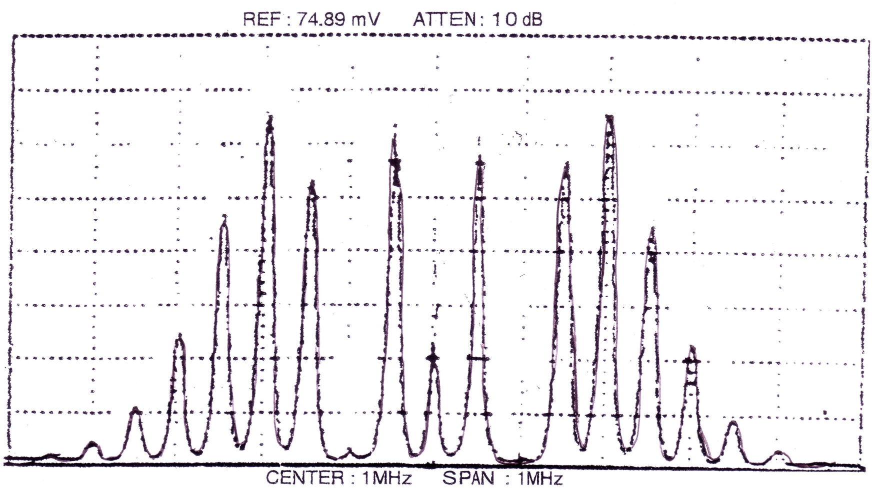
1-Déterminer la valeur de l'indice de modulation.

2- Que faut t-il faire pour limiter la largeur du spectre à l'étendue spectrale qu'occuperait ce même signal modulé en amplitude (DBSP). Quelle serait alors la puissance du signal modulé en fréquence.

3-Sur quel paramètre peut-on jouer pour annuler la raie centrale ? Donner alors la valeur de ce paramètre, en maintenant l'excursion de fréquence à 5kHz.

2 Analyse d'un spectre modulé en fréquence

Soit le spectre visualisé à l'analyseur de spectre, d'un signal porteur modulé en fréquence par un modulant sinusoïdal :



1-Rappeler l'expression temporelle du signal modulé en fréquence. Donner la définition du taux de modulation β.

2-Déterminer graphiquement : la fréquence de la porteuse et la fréquence du modulant

3-En repérant une valeur remarquable sur le spectre et en s'aidant du graphe fourni donnant l'évolution des fonctions de Bessel, donner la valeur de β .

4-On mesure à l'oscilloscope l'ampitude du modulant : A_m = 1V. Déduire la valeur de la sensibilité du modulateur.

5-Donner l'encombrement spectral B_c du signal modulé.

3 Analyse d'une modulation de fréquence

1- On considère un signal modulant : $m(t) = A_m \cdot \cos[2\pi F_m t]$ avec F_m =10 kHz et A_m= 20mV. On effectue une modulation de fréquence avec un modulateur de sensibilité k = 2MHz/V. On obtient le signal modulé $s(t) = A\cos[2\pi F_0 t + \beta sin(2\pi F_m t)]$

a- Donner la valeur de l'indice de modulation β.

b- Déterminer la bande de Carson B_c.

c- Donner l'expression du spectre S(f) du signal s(t) et le représenter dans sa bande de carson.

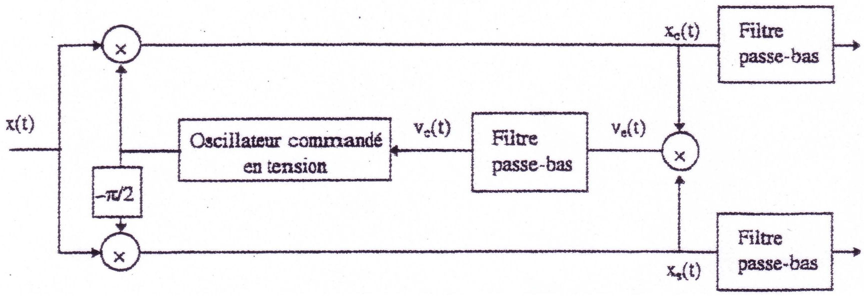
d- A quel ordre n=N peut-on se limiter pour transmettre 80% de la puissance totale du signal modulé

2- On réalise une transmission radiophonique sur la bande FM. Le modulant n'est plus un signal sinusoïdal mais un signal quelconque de bande passante b=20 kHz . La fréquence porteuse est choisie égale à 100 MHz et on fixe $|m(t)|_{max}$ = 10mV. Donner une estimation de la bande de fréquence à allouer pour transmettre le signal autour de la porteuse F_0 ? Comparer cette étendue spectrale à celle qu'occuperait ce même modulant transmis par MA BLU ?

Modulation numériques

1 Circuit de récupération de la porteuse, boucle de Costas

Soit le circuit de la figure :



x(t) est un signal numérique MDP2 (modulation de phase à deux états, 0 et π), d'amplitude A, de débit binaire 1/T et de fréquence de porteuse f_o :

$$x(t) = Acos(2\pi f_o t + \theta(t))$$

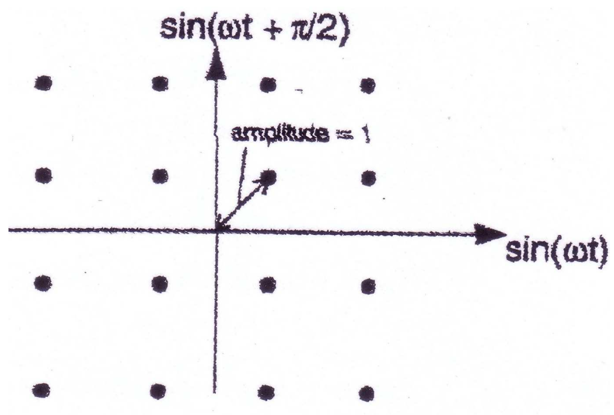
avec $\theta(t) = 0$ ou π. L'oscillateur commandé en tension délivre le signal $cos(2\pi f_o t + \theta_o(t))$, $\theta_o(t)$ dépendant de $v_c(t)$.

1-Exprimer $v_c(t)$ en fonction de l'erreur de phase $\phi(t) = [\theta_o(t) - \theta(t)]$

2-Dans le cas ou $v_c(t)$ est nul, que valent $x_s(t)$ et $x_c(t)$? Y a t'il ambiguïté par rapport à la suite binaire initiale ?

2 Modulation QAM

L'on désire réaliser un modulateur QAM (Quadrature Amplitude Modulation= modulation d'amplitude et de phase). La constellation des différents états du signal modulé est la suivante :



1-Combien existe-t-il de symboles pour ce type de modulation ?

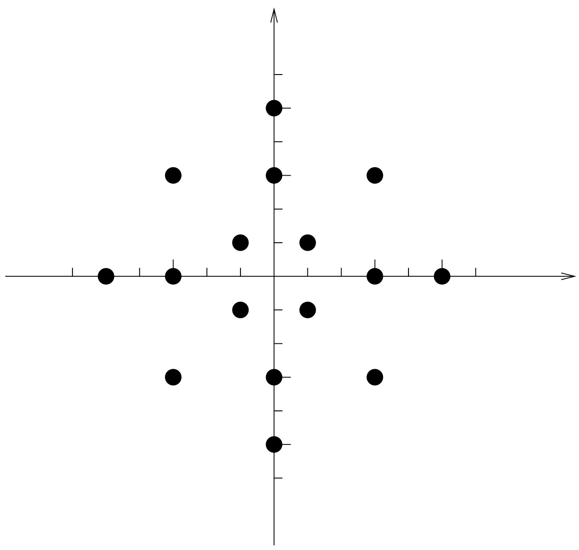
2-Combien de bits pourra-t-on envoyer simultanément ?

3-On réalise le système avec un modulateur IQ. Donner les différents niveaux (analogiques) qu'il conviendra d'appliquer sur les entrées I et Q du modulateur.

4-Si l'on désire dans ce cas transmettre un signal numérique à 30 Mbits, quelle devra être la fréquence des signaux en bande de base I et Q ?

3 Etude de la modulation V29 (extrait du partiel 2001)

Les fax utilisent une modulation de type V29 (télécopie rapide). Un rapport signal sur bruit a été mesuré et vaut 40 dB. La modulation V29 est en réalité une modulation de type QAM, dont le débit est de 9600 bits/s. Sa constellation est représentée sur la figure ci-dessous :



Les 4 bits Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 utilisés pour coder chaque symbole suivent la règle suivante :
Le premier bit Q_1 est associé à l'amplitude du signal à transmettre. Pour chaque phase, $Q_1 = 0$ est associé à l'amplitude la plus faible, et $Q_1 = 1$ est associé à l'amplitude la plus élevée. Les bits Q_2, Q_3, Q_4 sont associés à la phase du signal à transmettre suivant un codage différentiel expliqué dans le tableau suivant (les angles se lisent dans le sens trigonométrique) :

Q_2	Q_3	Q_4	**Changement de phase**
0	0	1	0 °
0	0	0	45 °
0	1	0	90 °
0	1	1	135 °
1	1	1	180 °
1	1	0	225 °
1	0	0	270 °
1	0	1	315 °

1. Calculer la capacité théorique de la ligne.

2. Quelle est la rapidité de modulation de cette transmission ?

3. On souhaite transmettre le train binaire suivant : 10011000101001110101. Avant cette séquence, un symbole a déjà été transmis et il correspond au point de coordonnées (3 ;0) sur la constellation.
   Donner les coordonnées des symboles transmis, ainsi que leur amplitude et leur phase.

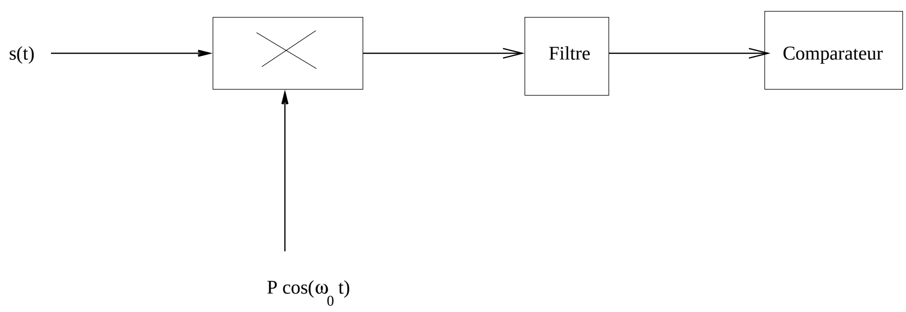
Synthèse sur les modulations.

1 Bruit sur une modulation de phase (extrait du partiel 2003)

On considère une transmission sur onde porteuse dont le signal s'écrit pour un caractère : $s(t) = m_p(t)S\cos(\omega_0 t) - m_q(t)S\sin(\omega_0 t)$ av ec $m_p(t) = \epsilon \cdot m(t)$ et $m_q(t) = \delta \cdot m(t)$. ϵ et δ valent ± 1 suivant la valeur des deux caractères binaires transmis simultanément :

	ϵ=-1	ϵ=+1
δ=-1	00	01
δ=+1	10	11

m(t) est un motif constitué d'un signal de valeur 1 pendant une durée T. Un bruit gaussien de densité spectrale constante (N_0) dans la bande de fré quence [f_0-$\frac{1}{T}$, f_0+$\frac{1}{T}$] s'ajoute à ce signal. On envisage le dispositif de la figure suivante constitué d'un multipl ieur (coefficient k) et d'un filtre suivi d'un comparateur à seuil nul :



1] Représenter les états de phase du signal s(t). A quel type de modulation correspond la constellation obtenue ?

2] Afin de démoduler, on utilise le schéma suivant :

a) Quel type de filtre faut-il utiliser ?

b) Quel caractère détecte t-on ainsi ?

c) Comment détecterait-on l'autre élement binaire ?

On peut décomposer le bruit en somme d'un bruit en phase et d'un bruit en quadrature : $b(t) = b_p(t)\cos(\omega_0 t) - b_q(t)\sin(\omega_0 t)$. Chacune des composantes possédant la même densité spectrale que b(t).

3] Après filtrage passe-bas sur [-$\frac{1}{T}$,+$\frac{1}{T}$], quelle est l' expression du signal et du bruit ? Quelle est l'expression de la probabilité s ur le bit détecté ?

2 Modulation PSK-8 (extrait du partiel 2004)

On utilise pour transmettre une source binaire, de débit D_b=3000 bits/s, une modulation PSK-8. On suppose que les symboles sont indépendants et équiprobables. Le canal est soumis à un bruit b(t) blanc additif, gaussien, centré, de variance σ^2. On note s(t) le signal transmis et z(t)=s(t)+b(t) le signal reçu.

1.Quelle est la rapidité de modulation ?

2.Représenter la constellation associée au signal modulé

3.Représenter la densité spectrale de puissance du bruit.

4.Donner l'expression du signal modulé s(t) ainsi que celle de son enveloppe complexe (on précisera l'alphabet de modulation, ainsi que la forme d'onde utilisée).

5.Indiquer un codage qui minimise le taux d'erreur par éléments binaires (on ne parle pas ici de codage correcteur d'erreur).

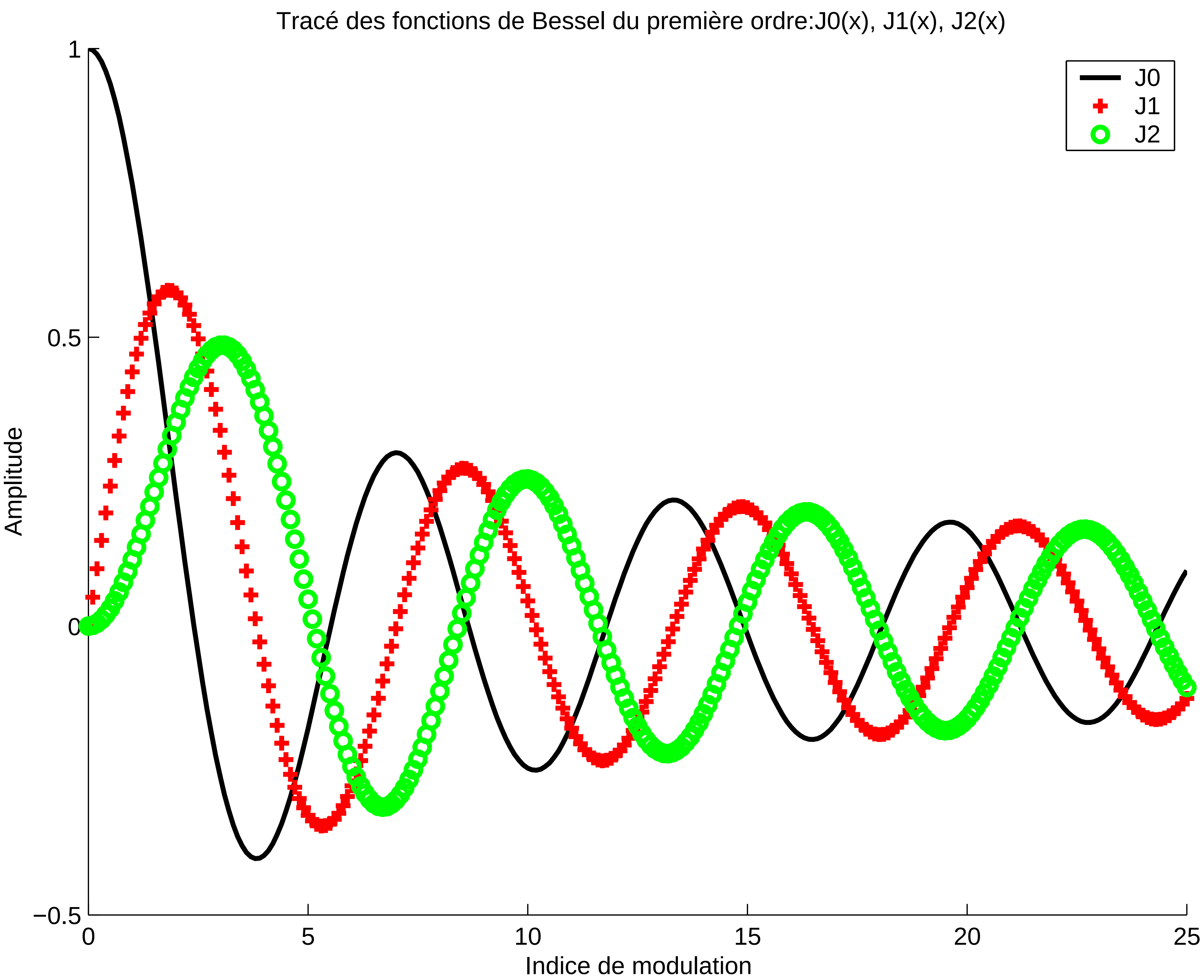
6.Donner le schéma de principe du détecteur qui fournit les composantes en phase et en quadrature du signal z(t). On notera respectivement $z_p(t)$ et $z_q(t)$ ces deux composantes.

7.Donner l'expression du filtre de réception qui minimise la probabilité d'erreur.

8.On suppose qu'avec ce filtre de réception, la fonction de transfert globale vérifie le critère de Nyquist. Donner l'expression des échantillons observés à la cadence 1/T en sortie du filtre de réception.

Table des fonctions de Bessel

x	Jo(x)	J1(x)	J2(x)	J3(x)	J4(x)	J5(x)	J6(x)	J7(x)	J8(x)	J9(x)	J10(x)
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.9385	0.2423	0.0306	0.0026	0.0002	0.0000					
1.0	0.7652	0.4401	0.1149	0.0196	0.0025	0.0002	0.0000				
1.5	0.5118	0.5579	0.2321	0.0610	0.0118	0.0018	0.0002	0.0000			
2.0	0.2239	0.5767	0.3528	0.1289	0.0340	0.0070	0.0012	0.0002	0.0000		
2.5	-0.0484	0.4971	0.4461	0.2166	0.0738	0.0195	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	
3.0	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3091	0.1320	0.0430	0.0114	0.0025	0.0005	0.0001	0.0000
3.5	-0.3801	0.1374	0.4586	0.3868	0.2044	0.0804	0.0254	0.0067	0.0015	0.0003	0.0001
4.0	-0.3971	-0.0660	0.3641	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152	0.0040	0.0009	0.0002
4.5	-0.3205	-0.2311	0.2178	0.4247	0.3484	0.1947	0.0843	0.0300	0.0091	0.0024	0.0006
5.0	-0.1776	-0.3276	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.1310	0.0534	0.0184	0.0055	0.0015
5.5	-0.0068	-0.3414	-0.1173	0.2561	0.3967	0.3209	0.1868	0.0866	0.0337	0.0113	0.0034
6.0	0.1506	-0.2767	-0.2429	0.1148	0.3576	0.3621	0.2458	0.1296	0.0565	0.0212	0.0070
6.5	0.2601	-0.1538	-0.3074	-0.0353	0.2748	0.3736	0.2999	0.1801	0.0880	0.0366	0.0133
7.0	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392	0.2336	0.1280	0.0589	0.0235
7.5	0.2663	0.1352	-0.2303	-0.2581	0.0238	0.2835	0.3541	0.2832	0.1744	0.0889	0.0390
8.0	0.1717	0.2346	-0.1130	-0.2911	-0.1054	0.1858	0.3376	0.3206	0.2235	0.1263	0.0608
8.5	0.0419	0.2731	0.0223	-0.2626	-0.2077	0.0671	0.2867	0.3376	0.2694	0.1694	0.0894
9.0	-0.0903	0.2453	0.1448	-0.1809	-0.2655	-0.0550	0.2043	0.3275	0.3051	0.2149	0.1247
9.5	-0.1939	0.1613	0.2279	-0.0653	-0.2691	-0.1613	0.0993	0.2868	0.3233	0.2577	0.1650
10.0	-0.2459	0.0435	0.2546	0.0584	-0.2196	-0.2341	-0.0145	0.2167	0.3179	0.2919	0.2075
10.5	-0.2366	-0.0788	0.2216	0.1633	-0.1283	-0.2611	-0.1203	0.1236	0.2851	0.3108	0.2477
11.0	-0.1712	-0.1768	0.1390	0.2273	-0.0150	-0.2383	-0.2016	0.0184	0.2250	0.3089	0.2804
11.5	-0.0677	-0.2284	0.0279	0.2381	0.0963	-0.1711	-0.2451	-0.0846	0.1421	0.2823	0.2998
12.0	0.0477	-0.2234	-0.0849	0.1951	0.1825	-0.0735	-0.2437	-0.1703	0.0451	0.2304	0.3005
12.5	0.1469	-0.1655	-0.1734	0.1100	0.2262	0.0347	-0.1984	-0.2252	-0.0538	0.1563	0.2789
13.0	0.2069	-0.0703	-0.2177	0.0033	0.2193	0.1316	-0.1180	-0.2406	-0.1410	0.0670	0.2338
13.5	0.2150	0.0380	-0.2094	-0.1001	0.1649	0.1978	-0.0184	-0.2141	-0.2037	-0.0273	0.1673
14.0	0.1711	0.1334	-0.1520	-0.1768	0.0762	0.2204	0.0812	-0.1508	-0.2320	-0.1143	0.0850
14.5	0.0875	0.1934	-0.0609	-0.2102	-0.0261	0.1958	0.1612	-0.0624	-0.2214	-0.1819	-0.0044
15.0	-0.0142	0.2051	0.0416	-0.1940	-0.1192	0.1305	0.2061	0.0345	-0.1740	-0.2200	-0.0901
15.5	-0.1092	0.1672	0.1308	-0.1335	-0.1825	0.0393	0.2078	0.1216	-0.0980	-0.2227	-0.1607
16.0	-0.1749	0.0904	0.1862	-0.0438	-0.2026	-0.0575	0.1667	0.1825	-0.0070	-0.1895	-0.2062


Tracé des fonctions de Bessel du première ordre:J0(x), J1(x), J2(x)
J0
J1
J2
Amplitude
1
0.5
0
−0.5
0
5
10
15
20
25
Indice de modulation

Annales

Durée : 2 heures

le 19/11/2003

Contrôle de Transmission de l'Information

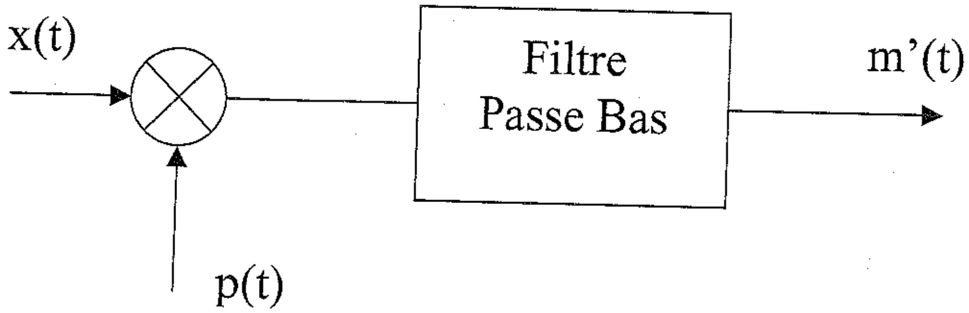
Documents non autorisés
Calculatrice autorisée

Questions de cours :

1. Quels sont les efficacités de modulation et les rendements énergétiques des modulations Double Bande Sans Porteuse et Bande Latérale Unique ?
2. Expliquer le principe de la démodulation cohérente utilisant une PLL
3. Donner l'expression de la bande de Carson pour une modulation de fréquence utilisant un modulant sinusoïdal. A quoi correspond cette bande ?
4. Donner l'expression d'un signal modulé en amplitude double bande avec porteuse dans le cas d'un modulant quelconque
5. Quelles sont les principales difficultés liées à la réalisation de la modulation bande latérale unique ?

Exercice 1 : Démodulation asynchrone

Soit x(t) un signal issu d'une modulation DBSP ; le modulant utilisé est sinusoïdal et d'amplitude unité. On souhaite démoduler ce signal pour retrouver à l'identique le modulant porteur d'information. Pour cela on réalise une démodulation cohérente dont le principe figure sur le schéma ci dessous :



1. Donner l'expression du signal modulé x(t)
2. Expliquer l'utilité du filtre passe bas lors de la démodulation

On démodule donc en cohérent mais la porteuse p(t) utilisée à cet effet présente une erreur de fréquence notée Δf et n'est donc pas parfaitement synchronisée.

3. Donner l'expression de p(t) puis celle de m'(t). Expliquer le problème engendré.

4. Proposer **deux** solutions pour résoudre ce problème tout en conservant une modulation d'amplitude pour transmettre l'information

Exercice 2 : Comparaison modulation FM/AM

On souhaite transmettre une information analogique présente dans le signal a(t) :

$$a(t) = A\cos(2\pi f_a t)$$

$$\text{avec } f_a = 10kHz \text{ et } A = 10mV$$

Pour cela on réalise deux modulations différentes AM et FM.

1. Donner l'expression du signal modulé DBAP avec une fréquence porteuse $f_p = 100kHz$ et une amplitude de 20mV ainsi qu'un taux de modulation de 0.25. Tracer le signal temporel ainsi que le spectre d'amplitude en respectant les échelles.

2. Quelle est la largeur de bande de fréquence de ce signal modulé ?

3. Calculer la puissance totale ainsi que la puissance consacrée à la transmission de l'information seule.

4. On réalise ensuite une modulation de fréquence analogique à partir du même modulant. La sensibilité du modulateur est de 5,6 MHz/V et la porteuse a les mêmes caractéristiques que précédemment. Calculer le taux de modulation et donner l'expression du signal modulé faisant apparaître les fonctions de Bessel

5. Quelle est la plage de variation de la fréquence instantanée ?

6. Tracer le spectre d'amplitude du signal modulé en respectant les échelles. Quelle particularité présente-t-il ?

7. Calculer la bande de Carson de cette modulation FM.

8. Calculer précisément la puissance du signal dans cette bande (on prendra la valeur du taux de modulation la plus proche dans les tables de Bessel)

9. Comparer les deux modulations en terme d'occupation spectrale et de puissance. Conclure sur les avantages et les inconvénients.

10. Combien de raies devrait-on prendre en compte pour ne retenir que 70% de la puissance totale du signal ?

ISEN 3

le 25 juin 2004

PARTIEL DE SST

PARTIE TELECOM (bande de base)

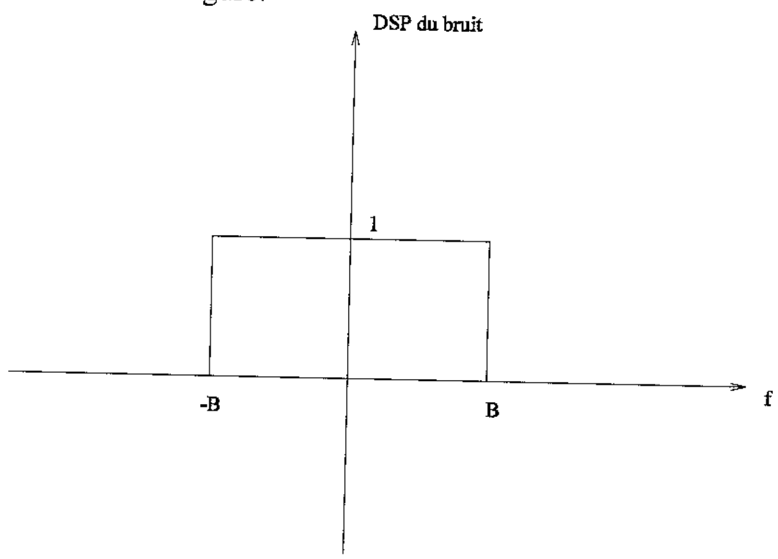
Exercice 3 :

Pour transmettre des éléments binaires α_k équiprobables, on utilise le codage NRZ suivant :

- si $\alpha_k=1$, alors on émet un symbole $a_k=1$
- si $\alpha_k=0$, alors on émet un symbole $a_k=-1$

La forme d'onde utilisée a une amplitude de +3 Volts et une durée Tb.

Ce signal est transmis sur un canal idéal à bruit additif gaussien de moyenne m=1.5V et d'écart-type σ = 3V. Le bruit est supposé stationnaire et de densité spectrale de puissance $\gamma_b(f)$ comme représenté sur la figure.



La structure du récepteur est linéaire et du même type que celle vue en cours. Le décodage de chaque bit se fait à partir d'un seul échantillon prélevé. Au niveau du décodeur, on fixe la règle de décision suivante pour le décodage :

- si la valeur de cet échantillon est supérieure au seuil optimal de décision, alors le récepteur décide qu'il a reçu un bit "1"
- si la valeur de cet échantillon est inférieure au seuil optimal de décision, alors le récepteur décide qu'il a reçu un bit "0"

1. Tracer le signal sortant du codage en ligne lorsque l'on envoie un bit "1"

2. Représenter l'allure du filtre adapté présent dans le récepteur optimal

3. Représenter la sortie du filtrage adapté lorsque l'on place en entrée le bit "1" après codage en ligne (on prendra K=1 et t_0=Tb)

Pour les questions suivantes, on fait abstraction du filtre adapté

4. Quel est le seuil optimal de décision assurant la probabilité d'erreur minimale ? (on fera attention au fait que **le bruit n'est pas centré** et aux répercutions sur ce seuil)

5. Déterminer l'expression de la probabilité de commettre une erreur sur le bit "1" en fonction des données de l'exercice (faire apparaître la fonction erf(x))

6. Déterminer l'expression de la probabilité de commettre une erreur sur le bit "0" en fonction des données de l'exercice (faire apparaître la fonction erf(x))

7. En déduire l'expression de la probabilité d'erreur totale

$$\text{On rappelle : } \operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Contrôle de Télécom

05 octobre 2005

ISEN 4 : année 2005/2006

Durée : 2 Heures Documents non autorisés

NB : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre désiré

Toute réponse doit être justifiée de façon claire et précise

Cours

a) Quels sont les intérêts des codes bipolaires Haute Densité ?

b) On considère un code RZ binaire.

Donner :

- La règle de codage
- La forme d'onde utilisée

Calculer : (*le calcul devra être présent sur la copie*)

- Sa moyenne
- Sa variance

c) Qu'est ce qu'un signal stationnaire à l'ordre 2 (c'est-à-dire au sens large) ?

d) Expliquer la principale origine de l'interférence entre symboles

e) Donner la probabilité d'erreur minimale lorsque les conditions suivantes sont vérifiées simultanément ?

- Le canal est à bande limitée
- Le critère de Nyquist est vérifié par la fonction de transfert globale de la chaîne de transmission
- La fonction de transfert globale de la chaîne est réelle et positive

Exercice 1 :

Décoder cette séquence en supposant qu'elle a été codée en HDB2 :

+1 0 +1 -1 +1 -1 0 -1 +1 0 +1 -1 +1 -1 0 0 +1 -1 0 -1

Décoder cette séquence en supposant qu'elle a été codée en HDB3 :

+1 0 0 0 -1 +1 -1 0 0 0 -1 0 0 +1 0 0 0 +1 -1 0 0 0 -1 +1

Représenter le signal émis après codage en HDB2 de cette séquence de bits :

000010000000110000000101000100000

Exercice 2 :

On considère un système de communication classique contenant un émetteur, un canal de transmission et un récepteur.
Le message numérique transmis est constitué de bits α_k. Le signal reçu est x(t) prend donc deux formes différentes selon le bit transmis.

$$x(t) = A_k s(t) + b(t)$$

avec **Ak=0 si α_k=0**
Ak=1 si α_k=1

Le bruit b(t) est supposé réel, aléatoire, gaussien, centré , de variance σ_b^2 et de densité spectrale de puissance constante égale à $N_0/2$dans la bande [-B ; B]. (avec $N_0>2$)

Le signal émis s(t) est réel, déterministe, de durée T, d'énergie finie E et approximativement de spectre borné dans la bande [-B , B].

Pour décider du bit α_k reçu, on échantillonne x(t) sur l'intervalle [kT ; (k+1)T[. On prélève ainsi N échantillons.
On souhaite que ces N échantillons soient indépendants.

1. Quelle est l'expression de la fonction d'autocorrélation du bruit ?

2. Quelle est la fréquence d'échantillonnage maximale que l'on peut utiliser ?

3. On suppose désormais (**et pour toutes les questions suivantes**) que le bruit est blanc avec une densité spectrale ayant la même valeur que précédemment.
   Rappeler ce qu'est un bruit blanc.

4. La règle de décision est :

$$\text{Si } \quad I = \sum_{k=1}^{N} x(k)s(k) > S \text{ alors } \hat{\alpha}_k = 1$$

$$\text{Si } \quad I = \sum_{k=1}^{N} x(k)s(k) < S \quad \text{alors } \hat{\alpha}_k = 0$$

   Quelles sont la moyenne $\boldsymbol{m_0}$ et la variance σ_0^2 de la variable aléatoire I si on suppose que le bit émis est α_k=0 (on supposera N très grand)
   Si on suppose que I est une variable aléatoire gaussienne, exprimer alors la probabilité d'erreur associée au bit « 0 » en fonction de I, S, $\boldsymbol{m_0}$, et σ_0 et de la fonction erf(x)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

5. On se ramène désormais au cas d'une observation continue x(t). Quelle est en fonction de s(t) l'allure du filtre de réception optimal assurant la minimisation de la probabilité d'erreur ?

Contrôle de Télécom

11 octobre 2006

ISEN 4

Durée : 2 Heures Documents non autorisés, calculatrice autorisée

NB : Toute réponse doit être justifiée de façon claire et précise

Cours

1. Quel est l'intérêt des codes bipolaires Haute Densité ?
2. Décrire la chaîne de réception optimale dans le cas d'un canal idéal (chaque élément de la chaîne sera détaillé)
3. Quelle est l'utilité du diagramme de l'œil ?
4. Expliquer les difficultés liées à la transmission sur canal à bande passante limitée
5. Qu'est ce qu'un bruit blanc stationnaire ?

Exercice 1

1. Coder cette séquence en HDB3 :

   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1

2. Coder cette séquence en HDB2 :

   1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0

3. Décoder cette séquence en la considérant codée en HDB3 :

   +1 0 0 0 +1 -1 0 0 0 -1 +1 0 0 +1 -1 +1 -1 0 0 -1 +1

4. Décoder cette séquence en la considérant codée en HDB2 :

   +1 0 +1 -1 0 0 -1 +1 0 +1 0 -1 +1 -1 0 0 -1 +1 0 +1 -1

Exercice 2

Partie A

On considère un système de communication contenant un émetteur, un canal de transmission et un récepteur.
Le message numérique transmis est constitué d'éléments binaires avec un débit de 100 kbits/s.
Le signal reçu est x(t) prend donc deux formes différentes :

$$x(t) = A_k s(t) + b(t) \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{lll} A_k=-1 & \text{si} & \alpha_k=0 \\ A_k=1 & \text{si} & \alpha_k=1 \end{array}$$

Le bruit b(t) est supposé réel, stationnaire, gaussien, centré et de densité spectrale de puissance constante égale à $N_0/2$ dans la bande [-B ; B] (avec $N_0>2$).
La forme d'onde s(t) est supposée dans un premier temps de type Manchester d'amplitude maximale 2V.
Pour décider des éléments binaires transmis, on échantillonne le signal reçu x(t) sur l'intervalle [kT ; (k+1)T[en prélevant N échantillons.

- A.1. Quelle est la durée de la forme d'onde s(t) utilisée pour le codage en ligne ?
- A.2. Calculer la rapidité de modulation de cette transmission
- A.3. Donner l'expression et l'allure de la réponse impulsionnelle du filtre de réception.
- A.4. Quels sont le ou les seuils optimaux à choisir à la réception ?
- A.5. Donner une condition sur l'échantillonnage pour que les échantillons de bruit soient indépendants. Quelle est la conséquence pour les échantillons x(n) prélevés ?

Partie B

On considère désormais le système de transmission suivant .
Le signal reçu est x(t) prend deux formes différentes :

$$x(t) = A_k s(t) + b(t) \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{lll} A_k=-1 & \text{si} & \alpha_k=0 \\ A_k=1 & \text{si} & \alpha_k=1 \end{array}$$

Le bruit b(t) est supposé réel, additif, stationnaire, gaussien, de moyenne 1,38V et d 'écart-type $\sigma = \sqrt{2}$.

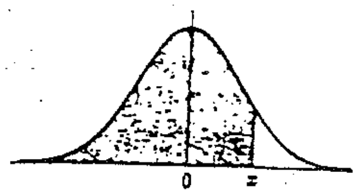
La forme d'onde s(t) est de type NRZ d'amplitude maximale 2V.

On suppose qu'à la réception on prélève un échantillon pour décoder chaque symbole transmis.

- B.1. Quels sont le ou les seuils optimaux à choisir à la réception ?
- B.2. Quelle est la probabilité d'erreur associée à cette transmission ?
- B.3. Comment serait modifiée cette probabilité d'erreur si l'on prélevait N échantillons à la place d'un seul ?

AIRE SOUTENDUE PAR LA COURBE
NORMALE CANONIQUE DE $-\infty$ à x

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Partie : Modulations analogiques et numériques

Partiel de Transmission de l'Information : Partie Modulation

3 décembre 2003

1 Exercice: Démodulation d'un signal basse fréquence

Dans la transmission d'images météorologiques par le satellite METEOSAT, le signal est modulé successivement en amplitude puis en fréquence. Pour permettre une réception par petites paraboles, on utilise une transmission à trés faible débit. On se propose d'étudier ici une partie du récepteur : la démodulation d'amplitude qui présente la particularité d'être effectuée à très faible fréquence porteuse. Le signal e(t) recu par le dispositif étudié est modulé en amplitude de fréquence porteuse f_p=2400 Hz; On notera A(t) son amplitude instantanée:

$$e(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_p t) \tag{1}$$

On admettra que A(t) est positif à chaque instant et que son spectre occupe uniformément la bande de fréquence [-1600Hz;+1600Hz].

1]Représenter schématiquement le spectre de e(t) ainsi que la bande de fréquence occupée.

2]Indiquer pourquoi une démodulation d'enveloppe classique (diode+filtre RC) n'est pas envisageable ici (quelque soit la forme de A(t)) ?

3]On envisage une démodulation par redressement suivi d'un filtrage:

a) Indiquer la forme du signal e(t) après redressement.

b) La décomposition en série de Fourier du signal apres redressement abouti à:

$$e(t) = A(t) \cdot [\frac{2}{\pi} + \frac{3}{4\pi}\cos(2\omega_p t) - \frac{4}{15\pi}\cos(4\omega_p t) + ...] \tag{2}$$

Tracer le spectre en amplitude du signal démodulé. Distinguer sur le spectre la partie utile du signal de celle inutile. Quelle fonction faut-il utiliser pour ne garder que la partie utile ?

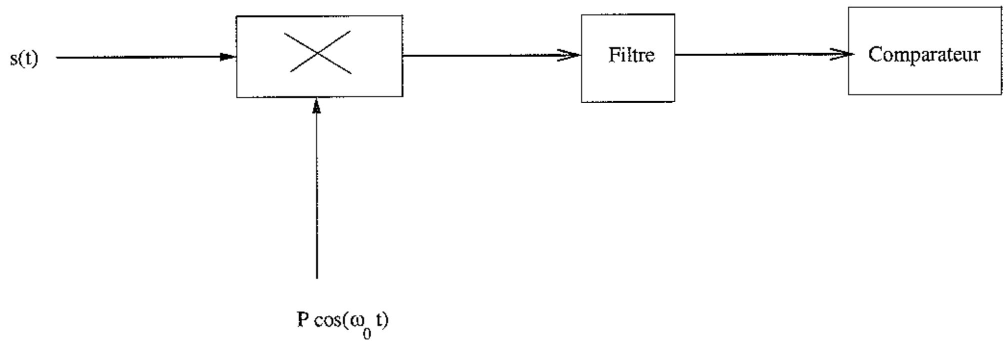


Figure 1: Schéma de principe du démodulateur

2 Problème : Bruit sur une modulation de phase.

On considère une transmission sur onde porteuse dont le signal s'écrit pour un caractère : $s(t) = m_p(t)S\cos(\omega_0 t) - m_q(t)S\sin(\omega_0 t)$ avec $m_p(t) = \epsilon \cdot m(t)$ et $m_q(t) = \delta \cdot m(t)$. ϵ et δ valent ± 1 suivant la valeur des deux caractères binaires transmis simultanément:

	ϵ=-1	ϵ=+1
δ=-1	00	01
δ=+1	10	11

m(t) est un motif constitué d'un signal de valeur 1 pendant une durée T. Un bruit gaussien de densité spectrale constante (N_0) dans la bande de fréquence [f_0-$\frac{1}{T}$, f_0+$\frac{1}{T}$] s'ajoute à ce signal. On envisage le dispositif de la figure (1) constitué d'un multiplieur (coefficient k) et d'un filtre suivi d'un comparateur à seuil nul.

1] Représenter les états de phase du signal s(t). A quel type de modulation correspond la constellation obtenue ?

2] Afin de démoduler... (figure 1)

a) Quel type de filtre faut-il utiliser ?

b) Quel caractère détecte t-on ainsi ?

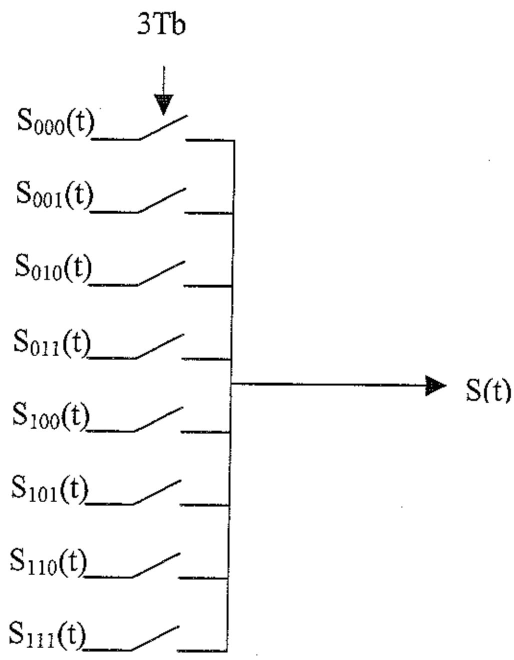
c) Comment détecterait-on l'autre élement binaire ?

On peut décomposer le bruit en somme d'un bruit en phase et d'un bruit en quadrature: $b(t) = b_p(t)\cos(\omega_0 t) - b_q(t)\sin(\omega_0 t)$. Chacune des composantes possédant la même densité spectrale que b(t).

3] Après filtrage passe-bas sur [-$\frac{1}{T}$,+$\frac{1}{T}$], quelle est l'expression du signal et du bruit ? Quelle est l'expression de la probabilité sur le bit détecté ?

Exercice 3 : Modulations numériques

On considère la modulation linéaire classique réalisée par le circuit suivant :



$$s_{000}(t) = 2\cos\left(2\pi f_c t + \frac{5\pi}{6}\right)$$
$$s_{001}(t) = \sqrt{3}\cos\left(2\pi f_c t - \pi\right)$$
$$s_{010}(t) = -2\sin\left(2\pi f_c t - \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$s_{011}(t) = \sin\left(\pi - 2\pi f_c t\right)$$
$$s_{100}(t) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi f_c t\right)$$
$$s_{101}(t) = -\sqrt{3}\sin\left(2\pi f_c t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$s_{110}(t) = -2\cos\left(2\pi f_c t - \frac{5\pi}{6}\right)$$
$$s_{111}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2}\right)$$

1. Dessiner les composantes en phase et en quadrature, l'amplitude et la phase du signal modulé pour la séquence binaire suivante : 011001101011000010111
2. Déterminer et dessiner la constellation de cette modulation. Selon vous de quel type de modulation s'agit-il ? Combien comporte-t-elle d'états ?
3. Exprimer la bande passante du signal modulé en fonction de la rapidité de modulation R

Partiel de Transmission de l'Information

ISEN 4

Le 08/12/2004

Durée : 4 heures

Avec calculatrice

Sans document

Ce partiel comporte 2 parties (propagation des signaux et modulations) à rédiger sur copies séparées

Deuxième partie : Modulations

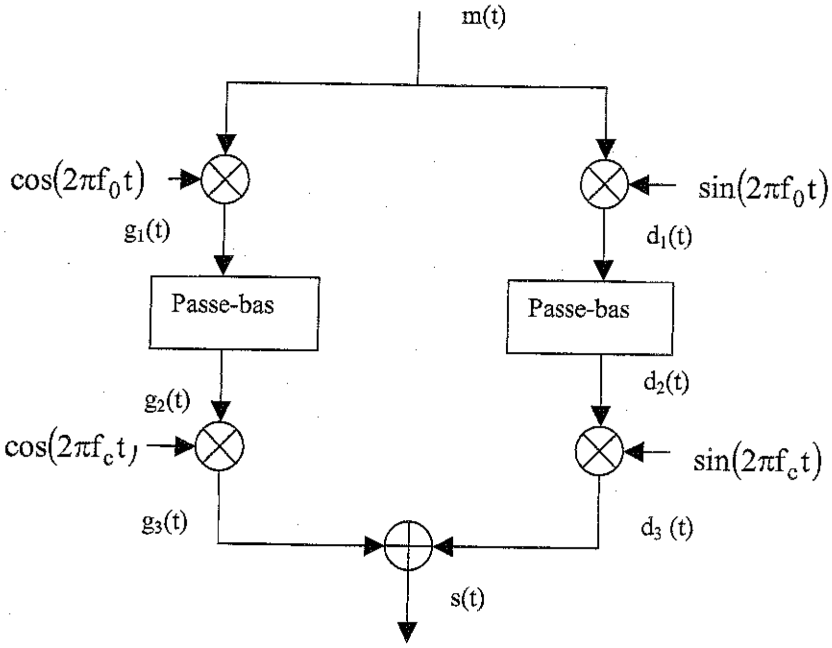
Exercice 1 :

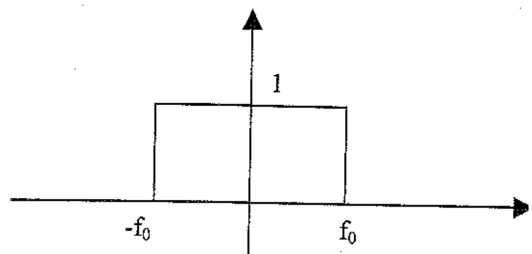
On souhaite transposer en fréquence l'information contenue dans un modulant m(t) :

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

La fréquence porteuse est notée f_c.
Pour réaliser cette opération on applique m(t) à l'entrée du circuit suivant composé de quatre mélangeurs et de filtres passe-bas idéaux.
Le signal modulant est tel que $f_m \in [0,f_0]$ et $f_c >> f_0$

1. Déterminer l'expression analytique et la transformée de Fourier des signaux g1(), g2(t), g3(t) , d1(t), d2(t), et d3(t). Représenter ces spectres en module.
2. Déterminer l'expression analytique du signal modulé s(t).
3. De quel type de modulation s'agit-il ?
4. Quel gain en puissance faut il appliquer au signal modulé pour qu'il ait la même puissance que le signal modulant ?





Réponse en fréquence des filtres

Exercice 2 :

On utilise pour transmettre une source binaire, de débit Db=3000 bits/s, une modulation PSK-8. On suppose que les symboles sont indépendants et équiprobables. Le canal est soumis à un bruit b(t) blanc additif, gaussien, centré, de variance σ^2. La durée symbole est notée T.
On note s(t) le signal transmis et z(t)=s(t)+b(t) le signal reçu.

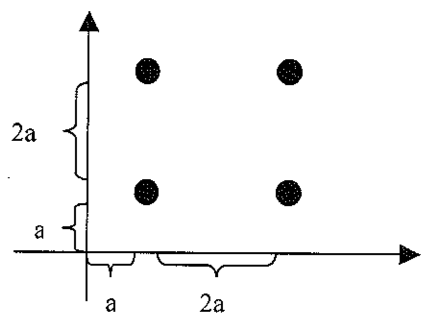
1. Quelle est la rapidité de modulation ?
2. Représenter la constellation associée au signal modulé
3. Représenter la densité spectrale de puissance du bruit.
4. Donner l'expression du signal modulé s(t) ainsi que celle de son enveloppe complexe (on précisera l'alphabet de modulation, ainsi que la forme d'onde utilisée).
5. Indiquer un codage qui minimise le taux d'erreur par éléments binaires (on ne parle pas ici de codage correcteur d'erreur).
6. Donner le schéma de principe du détecteur qui fournit les composantes en phase et en quadrature du signal z(t). On notera respectivement $z_p(t)$ et $z_q(t)$ ces deux composantes.
7. Donner l'expression du filtre de réception qui minimise la probabilité d'erreur.
8. On suppose qu'avec ce filtre de réception, la fonction de transfert globale vérifie le critère de Nyquist. Donner l'expression des échantillons observés à la cadence 1/T en sortie du filtre de réception.

Exercice 3 :

1. Expliquer les différentes étapes de la réalisation d'une modulation ASK-2 où les symboles prennent leur valeur dans un alphabet classique. Vous détaillerez le rôle de chaque étape.

2. Donner les constellations d'une modulation ASK-4 utilisant comme porteuse $\sin(2\pi f_c t)$ quand l'entrée de la modulation est :
   a. Soit un signal bipolaire de quatre niveaux
   b. Soit un signal unipolaire de quatre niveaux

3. Si la puissance maximale d'un symbole pour une modulation QAM-16 est de 200W, quelles sont les amplitudes des différents symboles dans la constellation associée ?



Partiel de Télécom

Partie « Communications Numériques »

ISEN 4
2005/2006

Durée : 2 heures
Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Exercice 1 :

Un système de transmission numérique de signaux vocaux procède de la manière suivante :

- Les signaux analogiques sont échantillonnés à une fréquence permettant la transmission des fréquences vocales de 0 à 4kHz
- On effectue ensuite un codage sur 12 bits

1. Quelle est la fréquence d'échantillonnage ?
2. Un procédé de multiplexage permet d'envoyer 20 mots à la fois. Quel est le débit binaire de la ligne téléphonique ?
3. Quelle est la capacité de la ligne dans le cas d'un rapport signal à bruit de 20dB ?

Exercice 2 :

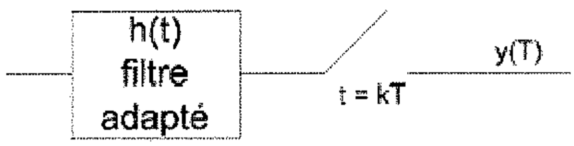
Dans un système de transmission, on met en place une modulation QAM-16.
La fréquence de la porteuse est de 800 MHz. Le débit est de 144 Mbits/s. La largeur de bande du canal est de 24MHz centré sur la fréquence porteuse. La puissance maximale mesurée d'un symbole dans une charge de 50 Ω est de 200 W.

1. Donner l'expression du signal modulé
2. Tracer la constellation en précisant la valeur exacte des abscisses et ordonnées de chaque état

On suppose que chaque symbole est codé par un signal modulé de durée T dont la forme d'onde s(t) avant modulation est la suivante :

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < t < \frac{T}{3} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{T}{3} < t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En réception, après démodulation, on a recours au schéma classique suivant pour récupérer la valeur du symbole envoyé. A l'entrée de ce circuit, on retrouve le signal après propagation dans le canal et démodulation.



3. Dessiner la réponse impulsionnelle du filtre adapté h(t)
4. Expliquer comment on peut trouver les instants d'échantillonnage adéquats dans ce récepteur.
5. Trouver la sortie de ce récepteur lorsque l'on place en entrée le signal s(t)
6. De quoi est suivi ce schéma de réception pour finaliser la récupération des symboles envoyés ? expliquer.

Exercice 3 :

On souhaite envoyer un message analogique représenté par le signal m(t) :

$$m(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\text{avec } f_0 = 250\text{kHz} \text{ et } A = 200\text{mV}$$

Pour cela l'ingénieur hésite entre deux types de modulations : modulation d'amplitude ou de fréquence

1. Donner l'expression du signal modulé DBAP avec une fréquence porteuse $f_p = 1\text{MHz}$ et une amplitude de 500mV ainsi qu'un taux de modulation de 0,3 . Tracer le signal temporel ainsi que le spectre d'amplitude en respectant les échelles.

2. Quelle est la largeur de bande de fréquence de ce signal modulé ?

3. Calculer la puissance totale ainsi que la puissance consacrée à la transmission de l'information seule.

4. On réalise ensuite une modulation de fréquence analogique à partir du même modulant. La sensibilité du modulateur est de 5,6 MHz/V et la porteuse a les mêmes caractéristiques que précédemment. Calculer le taux de modulation et donner l'expression du signal modulé faisant apparaître les fonctions de Bessel

5. Quelle est la plage de variation de la fréquence instantanée ?

6. Tracer le spectre d'amplitude du signal modulé en respectant les échelles.

7. Calculer la bande de Carson de cette modulation FM.

8. Calculer précisément la puissance du signal dans cette bande (on prendra la valeur du taux de modulation la plus proche dans les tables de Bessel)

9. Effectuer un raisonnement sur le choix de l'ingénieur quant à la modulation à utiliser.

10. Combien de raies devrait-on prendre en compte pour ne retenir que 65% de la puissance totale du signal ?

Partiel de Télécommunications

ISEN 4

Le 23/01/2007

Durée : 4 heures

Avec calculatrice

Sans documents

Ce partiel comporte 2 parties (propagation des signaux et modulations)

à <u>rédiger sur copies séparées</u>

Deuxième partie : Modulations

Exercice 1: Signal vidéo d'une caméra: modulations analogiques

Un signal vidéo contient un signal de luminance et un signal de chrominance.

Hypothèses: $E_R(t)$, $E_V(t)$, $E_B(t)$ représentent les valeurs instantanées des signaux fournis par la caméra et correspondent respectivement aux couleurs primaires rouge, vert, bleu. La valeur instantanée de la luminance, exprimée en volts, est donnée par la relation suivante:

$$E_y(t) = 0.3E_R(t) + 0.6E_V(t) + 0.1E_B(t) \tag{1}$$

Les valeurs instantanées du signal de luminance, exprimée en Volts, des signaux de chrominance sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} C_R(t) &= -1.9[E_R(t) - E_y(t)] \\ C_B(t) &= +1.5[E_B(t) - E_y(t)] \end{aligned} \tag{2}$$

On précise que pour le NOIR $E_v = E_R = E_B = 0$, dans la cadre du procédé SECAM, chaque signal chrominance module une porteuse en fréquence. Ces porteuses sont en fait appelées sous-porteuses.

$C_R(t)$ module la fréquence d'une porteuse de 4.43 MHz et $C_B(t)$ celle d'une porteuse de 4.25 MHz. Les signaux de chrominance sont multiplexés dans le temps (Figure 1). Le signal modulé en fréquence est additionné au signal de luminance. Le signal résultant module en amplitude une porteuse de fréquence F_c de 600 MHz. Cette modulation d'amplitude présente une bande latérale atténuée dite encore bande latérale résiduelle (Figure 2).

Généralités sur la modulation

1) On module en fréquence une porteuse cosinusoidale d'amplitude A=1.0 V et de fréquence moyenne F_R=4.43MHz par un signal sinusoidal $V_1(t)$ de fréquence 100 KHz (cf Figure 3). L'indice de modulation correspondant vaut β=2. On pose $\Omega_R = 2\pi F_R$ et $\omega_1 = 2\pi f_1$. Donner l'expression de $V_2(t)$.

2) Donner l'expression du spectre de $V_2(t)$

3) En déduire l'amplitude des raies qui se trouve dans la bande de Carson

4) Le signal $V_2(t)$ est additionné au signal cosinusoidal $V_3(t)$ d'amplitude 0.5V et de fréquence 2MHz pour former le signal $V_4(t)$. Indiquez le spectre de $V_4(t)$.

5) Le signal $V_4(t)$ module en amplitude une porteuse cosinusoidale de fréquence 600 MHz. Indiquer les fréquences des composantes du spectre du signal $V_5(t)$ en justifiant votre réponse.

Retour au codage SECAM et D2-MAC/PAQUET

Considérons une caméra SECAM filmant des raies verticales d'égales largeurs alternativement rouges et noires. On admettra que le nombre de raies est tel qu'il en résulte un signal de luminance périodique, de fréquence 1 MHz et de rapport cyclique 0.5.

1) Donnez les valeurs de $C_R(t)$ et de $C_B(t)$.

2) Représentez le graphique de $E_y(t)$ sur une période.

3) Jusitifez l'absence d'harmonique de rang pair dans le spectre d'amplitude de $E_y(t)$.

4) Donnez les fréquences des composantes du spectre d'amplitude du signal $u(t)$ de la figure 1 dans l'intervalle de temps où $C_R(t)$ est transmis (composantes de la bande latérale droite seulement).

Dans le système D2-MAC/PAQUET, les signaux de chrominance sont échantillonnés. Afin d'eviter des recouvrements de spectres, les signaux numériques constitués sont filtrés. La structure du filtre est donnée à la figure 5.

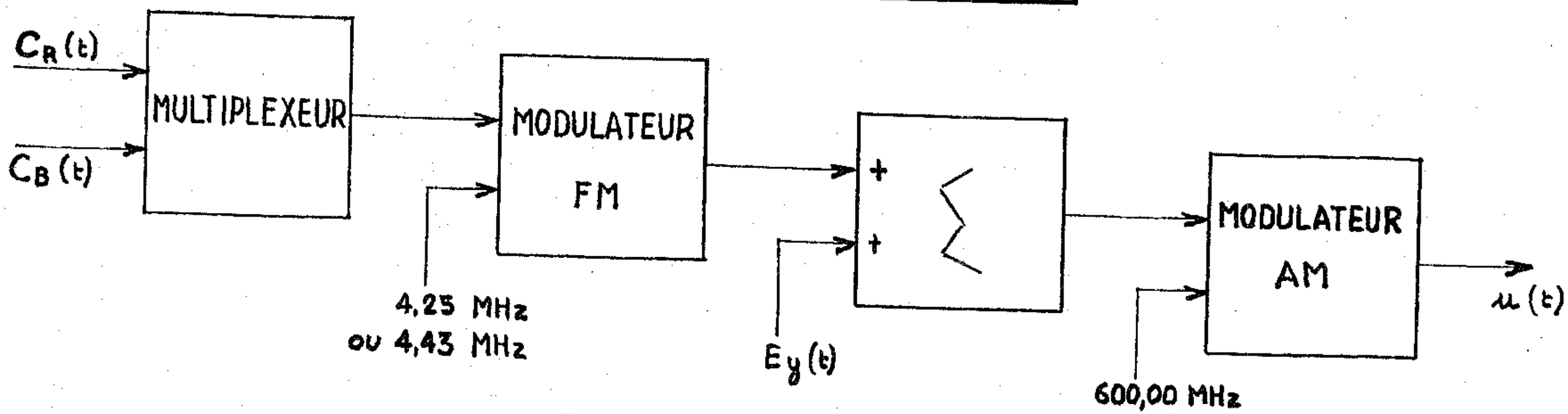
5) Donner la fonction de transfert du filtre numérique !

Exercice 2 :

On considère une modulation QAM-16 réalisée à partir d'une forme d'onde h(t) de type NRZ et une fréquence porteuse notée f_0. On suppose que la transmission du signal modulé s(t) se fait sur un canal de bande B autour de la fréquence porteuse et que le bruit b(t) est blanc, additif, gaussien, de moyenne m et de densité spectrale de puissance $N_0/2$.

1. Donner l'expression du signal modulé
2. Donner l'expression de l'enveloppe complexe du signal modulé
3. Décrire un dispositif qui donne les composantes en phase et en quadrature
4. Décrire la forme du récepteur optimal
5. Donner l'expression des parties réelle et imaginaire des échantillons Y_n en sortie du filtre de réception
6. On suppose que la transmission se fait sans IES. Donner les propriétés de ces échantillons observés en sortie du filtre de réception
7. Détailler l'organe de décision final
8. On note $p(t) = h(t) * h^*(-t)$. Donner l'expression de l'énergie moyenne par bit en fonction de p(0)

Figure I



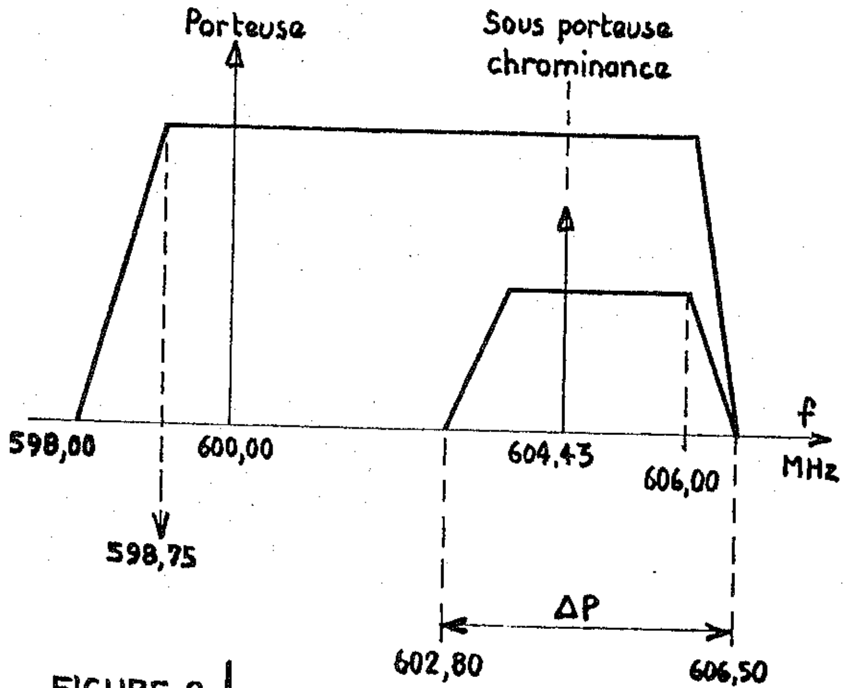


FIGURE 2

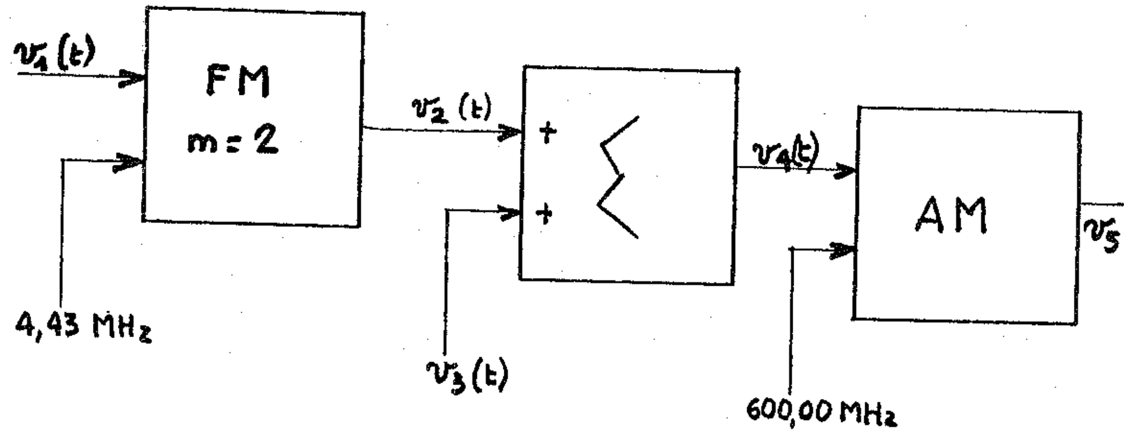
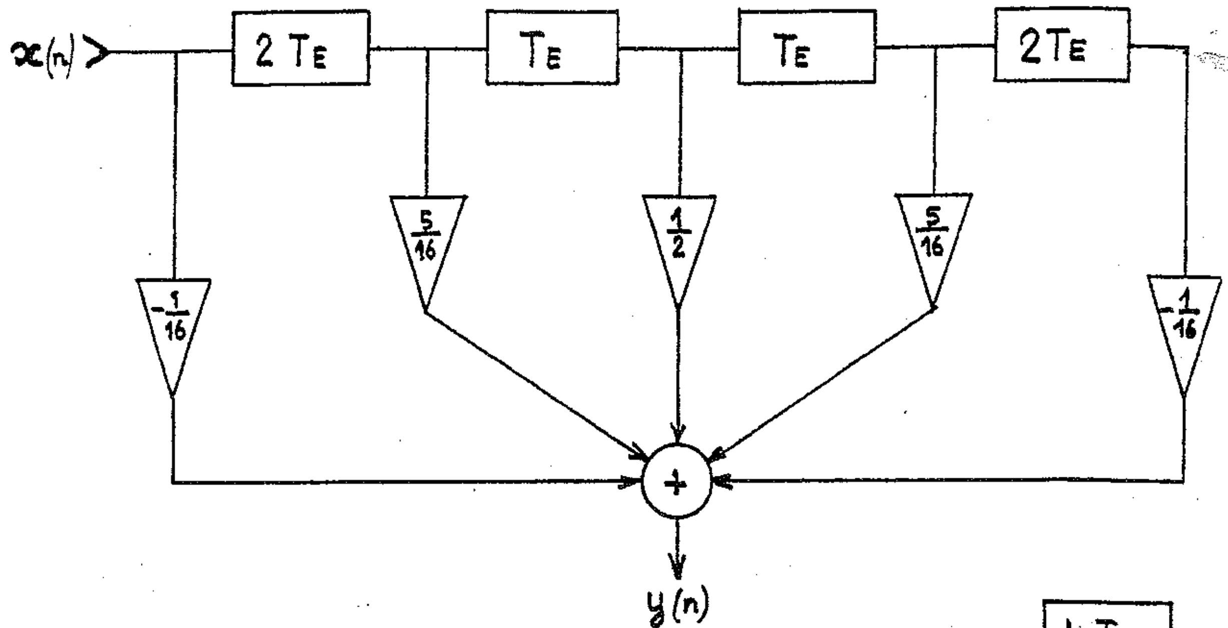
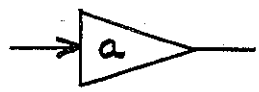


FIGURE 3



Retard de k périodes

FIGURE 5



Multiplication par a

Table 1 : Table des fonctions de Bessel

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$	$J_9(x)$	$J_{10}(x)$
0.0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.9385	0.2423	0.0306	0.0026	0.0002	0.0000					
1.0	0.7652	0.4401	0.1149	0.0196	0.0025	0.0002	0.0000				
1.5	0.5118	0.5579	0.2321	0.0610	0.0118	0.0018	0.0002	0.0000			
2.0	0.2239	0.5767	0.3528	0.1289	0.0340	0.0070	0.0012	0.0002	0.0000		
2.5	-0.0484	0.4971	0.4461	0.2166	0.0738	0.0195	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	
3.0	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3091	0.1320	0.0430	0.0114	0.0025	0.0005	0.0001	0.0000
3.5	-0.3801	0.1374	0.4586	0.3868	0.2044	0.0804	0.0254	0.0067	0.0015	0.0003	0.0001
4.0	-0.3971	-0.0660	0.3641	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152	0.0040	0.0009	0.0002
4.5	-0.3205	-0.2311	0.2178	0.4247	0.3484	0.1947	0.0843	0.0300	0.0091	0.0024	0.0006
5.0	-0.1776	-0.3276	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.1310	0.0534	0.0184	0.0055	0.0015
5.5	-0.0068	-0.3414	-0.1173	0.2561	0.3967	0.3209	0.1868	0.0866	0.0337	0.0113	0.0034
6.0	0.1506	-0.2767	-0.2429	0.1148	0.3576	0.3621	0.2458	0.1296	0.0565	0.0212	0.0070
6.5	0.2601	-0.1538	-0.3074	-0.0353	0.2748	0.3736	0.2999	0.1801	0.0880	0.0366	0.0133
7.0	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392	0.2336	0.1280	0.0589	0.0235
7.5	0.2663	0.1352	-0.2303	-0.2581	0.0238	0.2835	0.3541	0.2832	0.1744	0.0889	0.0390
8.0	0.1717	0.2346	-0.1130	-0.2911	-0.1054	0.1858	0.3376	0.3206	0.2235	0.1263	0.0608
8.5	0.0419	0.2731	0.0223	-0.2626	-0.2077	0.0671	0.2867	0.3376	0.2694	0.1694	0.0894
9.0	-0.0903	0.2453	0.1448	-0.1809	-0.2655	-0.0550	0.2043	0.3275	0.3051	0.2149	0.1247
9.5	-0.1939	0.1613	0.2279	-0.0653	-0.2691	-0.1613	0.0993	0.2868	0.3233	0.2577	0.1650
10.0	-0.2459	0.0435	0.2546	0.0584	-0.2196	-0.2341	-0.0145	0.2167	0.3179	0.2919	0.2075
10.5	-0.2366	-0.0788	0.2216	0.1633	-0.1283	-0.2611	-0.1203	0.1236	0.2851	0.3108	0.2477
11.0	-0.1712	-0.1768	0.1390	0.2273	-0.0150	-0.2383	-0.2016	0.0184	0.2250	0.3089	0.2804
11.5	-0.0677	-0.2284	0.0279	0.2381	0.0963	-0.1711	-0.2451	-0.0846	0.1421	0.2823	0.2998
12.0	0.0477	-0.2234	-0.0849	0.1951	0.1825	-0.0735	-0.2437	-0.1703	0.0451	0.2304	0.3005
12.5	0.1469	-0.1655	-0.1734	0.1100	0.2262	0.0347	-0.1984	-0.2252	-0.0538	0.1563	0.2789
13.0	0.2069	-0.0703	-0.2177	0.0033	0.2193	0.1316	-0.1180	-0.2406	-0.1410	0.0670	0.2338
13.5	0.2150	0.0380	-0.2094	-0.1001	0.1649	0.1978	-0.0184	-0.2141	-0.2037	-0.0273	0.1673
14.0	0.1711	0.1334	-0.1520	-0.1768	0.0762	0.2204	0.0812	-0.1508	-0.2320	-0.1143	0.0850
14.5	0.0875	0.1934	-0.0609	-0.2102	-0.0261	0.1958	0.1612	-0.0624	-0.2214	-0.1819	-0.0044
15.0	-0.0142	0.2051	0.0416	-0.1940	-0.1192	0.1305	0.2061	0.0345	-0.1740	-0.2200	-0.0901
15.5	-0.1092	0.1672	0.1308	-0.1335	-0.1825	0.0393	0.2078	0.1216	-0.0980	-0.2227	-0.1607
16.0	-0.1749	0.0904	0.1862	-0.0438	-0.2026	-0.0575	0.1667	0.1825	-0.0070	-0.1895	-0.2062

x	$J_{11}(x)$	$J_{12}(x)$	$J_{13}(x)$	$J_{14}(x)$	$J_{15}(x)$	$J_{16}(x)$	$J_{17}(x)$	$J_{18}(x)$	$J_{19}(x)$	$J_{20}(x)$
5.0	0.0004	0.0001	0.0000							
5.5	0.0009	0.0002	0.0000							
6.0	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000						
6.5	0.0043	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000					
7.0	0.0083	0.0027	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000				
7.5	0.0151	0.0052	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000				
8.0	0.0256	0.0096	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000			
8.5	0.0410	0.0167	0.0061	0.0021	0.0006	0.0002	0.0000			
9.0	0.0622	0.0274	0.0108	0.0039	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000		
9.5	0.0897	0.0427	0.0182	0.0070	0.0025	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	
10.0	0.1231	0.0634	0.0290	0.0120	0.0045	0.0016	0.0005	0.0002	0.0000	
10.5	0.1611	0.0898	0.0441	0.0195	0.0078	0.0029	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
11.0	0.2010	0.1216	0.0643	0.0304	0.0130	0.0051	0.0019	0.0006	0.0002	0.0001
11.5	0.2390	0.1575	0.0897	0.0454	0.0207	0.0086	0.0033	0.0012	0.0004	0.0001
12.0	0.2704	0.1953	0.1201	0.0650	0.0316	0.0140	0.0057	0.0022	0.0008	0.0003
13.0	0.2927	0.2615	0.1901	0.1188	0.0656	0.0327	0.0149	0.0063	0.0025	0.0009
14.0	0.2357	0.2855	0.2536	0.1855	0.1174	0.0661	0.0337	0.0158	0.0068	0.0028
15.0	0.1000	0.2367	0.2787	0.2464	0.1813	0.1162	0.0665	0.0346	0.0166	0.0074
16.0	-0.0682	0.1124	0.2368	0.2724	0.2399	0.1775	0.1150	0.0668	0.0354	0.0173